Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ, В. А. ЩЕПЕТЕВ

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА q-КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 III 1974)

В работе (1) сформулирована одна теорема площадей для класса q-квазиконформных гомеоморфизмов расширенной комплексной плоскости на себя, конформных вне единичного круга, нормированных в точке $z=\infty$ условиями $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty)=1$.

В настоящей заметке принцип площадей распространяется на класс мероморфных и однолистных в конечносвязной области функций $w=f(z)$, допускающих q-квазиконформное продолжение до гомеоморфизма плоскости на себя.

1. Пусть B — конечносвязная область плоскости z, содержащая бесконечно удаленную точку, с границей Γ, состоящей из m замкнутых, взаимно внешних аналитических кривых Жордана $\Gamma^{(\nu)}$, $\nu=1, \ldots, m$. Обозначим через $\sum(B;\ q)$ множество всех q-квазиконформных гомеоморфизмов $w=f(z)$ плоскости на себя, удовлетворяющих уравнению Бельтрами $f_{\bar z}=\mu(z)f_z$ с комплексной измеримой характеристикой $\mu(z)$, $|\mu(z)|\leqslant k<1$ *, и таких, что сужение $f(z)$ на B суть мероморфная и однолистная функция с лорановским разложением в точке $z=\infty$ вида

$$f(z)=z+\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}+\ldots, \quad f\in\Sigma(B), \quad z\in B. \tag{1}$$

Заметим, что если $f(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B)$, отображающая B на область с аналитической границей, то для нее нетрудно построить q-квазиконформное продолжение на всю комплексную плоскость (ср. (3), стр. 1068).

Следуя работе И. М. Милина (4) (см., также (5)), введем в области B лорановскую систему функций $\{\varphi_n(z);\ \Phi_n(z)\}_1^\infty$ и две функции области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \zeta)$ по формулам **

$$R(z,\zeta)=\frac{1}{2}\ln\frac{(z-\zeta)^2}{j_{\pi/2}(z,\zeta)j_0(z,\zeta)}, \quad P(z,\zeta)=\frac{1}{2}\ln\frac{j_{\pi/2}(z,\zeta)}{j_0(z,\zeta)}. \tag{2}$$

Здесь при заданных $\zeta\in B$ $(\zeta\neq\infty)$ и $\theta\in[0, \pi)$, $j_\theta(z, \zeta)\in\Sigma(B)$, $j_\theta(\zeta, \zeta)=0$, единственная в области B функция, которая отображает B на w-плоскость с m разрезами по дугам логарифмических спиралей наклона θ к лучу, исходящему из начала координат (см., например, (6), стр. 219).

2. Пусть $w=f(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B;\ q)$. Условимся обозначать образ области B при отображении $f(z)$ через D, а функцию Грина для области D с полюсом в точке $w=\infty$ через $G(w,\ \infty;\ D)$. При каждом $\rho\in[1, \infty)$ линии уровня $C_\rho=\{w\colon\ G(w,\ \infty;\ D)=\ln\rho\}$ ограничивает область D_ρ, содержащую точку $w=\infty$ и множество d_ρ, являющееся внутренностью линии уровня C_ρ.

* Заметим, что характеристики $p(z)$, $\theta(z)$ М. А. Лаврентьева (см. (2)) отображения $f(z)$ связаны с комплексным отклонением $\mu(z)$ п.в. соотношением $\mu(z)=-e^{2i\theta}(p-1)(p+1)^{-1}$.

** Выбирается та ветвь логарифмической функции, которая при $z=\infty$ обращается в нуль. При $\zeta=\infty$ полагаем $R(z,\ \infty)=P(z,\ \infty)=0$, $z\in B$.

Прежде чем сформулировать основную теорему, заметим, что функци $\Phi_n(z)$ лорановской системы могут быть представлены в виде $\Phi_n(z) = P_n(z)+h_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, где $P_n(z)$ — полиномы степени n, а $h_n(z)$ регулярные в B функции, нормированные условием $h_n(\infty)=0$ (см. ([7], стр. 145).

Теорема. *Пусть $w=f(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B; q)$ $Q(w)$ — произвольная функция, регулярная на множестве d_ρ, $\rho>1$, отлич ная от постоянной в каждой связной компоненте. Производная сложно функции $F(z)=Q(f(z))$ регулярна на некотором кольцевом множеств $B_{r,R}=\{z: \ln r<G(z, \infty, B)<\ln R\}$, $1\leqslant r<R$, и разлагается в ряд типа Лоран*

$$F'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n\Phi_n'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z). \tag{3}$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n h_n'(z)+\lambda_n\varphi_n'(z))=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\varphi_n'(z), \tag{4}$$

тогда имеет место неравенство

$$(1-k^2)\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2\leqslant k^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Lambda_n|^2-\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\right). \tag{5}$$

При этом характеристика отображения, реализующего знак равенства имеет вид

$$\mu(z)=\begin{cases}0, & z\in B,\\ ke^{i\theta}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\Lambda_nP_n'(z)}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_nP_n'(z)}, & z\in CB,\end{cases} \tag{6}$$

где θ — произвольное вещественное число.

Площадь σ римановой поверхности, являющейся образом множества CB при q-квазиконформном отображении $F(z)$, оценивается снизу по формуле

$$\sigma\geqslant\frac{1-k^2}{k^2}\iint\limits_{CB}|F_{\bar z}|^2\,dx\,dy,\quad z=x+iy,$$

со знаком равенства при $|\mu(z)|=k$ п.в. в CB. С другой стороны (ср. ([7], стр. 184), $\sigma=\pi(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Lambda_n|^2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2)$.

Представим множество CB в виде суммы его связных компонент b_k, $CB=\bigcup\limits_{k=1}^{m}b_k$, и определим во всей комплексной плоскости z функцию $g(z)$ следующим образом: $g(z)=F(z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_nP_n(z)-c_k$, когда $z\in b_k$ и $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_nh_n(z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z)$, когда $z\in B$. Здесь c_k — надлежащим образом выбранные комплексные постоянные.

Представим производную $g_z(z)$ в интегральном виде (см. ([8], стр. 57, 73):

$$g_z(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CB}F_{\bar\zeta}(\zeta)(\zeta-z)^{-2}\,d\xi\,d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Тогда

$$\iint\limits_{CB} |F_\xi|^2\, d\xi\, d\eta = \iint |g_\xi|^2\, d\xi\, d\eta \geqslant \pi \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2,$$

со знаком равенства в том и только в том случае, когда $g_z(z)=0$ п.в. в CB. Полученные соотношения приводят к неравенству (5).

Замечание 1. Считая $B=\{z\colon |z|>1\}$, получим неравенство площадей, установленное в работе [1].

Замечание 2. Осуществляя в теореме предельный переход при $k\to 1$, получим обобщенную теорему площадей И. М. Милина [4] для функций класса $\Sigma(B)$.

3. Сформулируем некоторые следствия, выбирая надлежащим образом функцию $Q(w)$ (ср. [4, 7, 9–11]).

Следствие 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B,\ q)$, разложение которой в ряд типа Лорана имеет вид*

$$f(z) = a_{11}\Phi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z) + \alpha_0, \quad z\in B.$$

Тогда

$$(1-k^2) \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n + \alpha_{1,n}|^2 \leqslant k^2 \left(|a_{11}|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \right), \tag{7}$$

где $\alpha_{1,n}$, $n=1, 2, \ldots,$ — коэффициенты при z^{-1} в разложении функций $h_n(z)$ в окрестности точки $z=\infty$.

Замечание 3. Осуществляя в формуле (7) предельный переход при $k\to 1$, придем к внешней теореме площадей для функций класса $\Sigma(B)$.

Пусть $f(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B;\ q)$. Рассмотрим регулярную в области B функцию

$$\ln \frac{z-\zeta}{f(z)-f(\zeta)} - R(z,\zeta) = \sum_{n,p=1}^{\infty} \omega_{n,p}\varphi_n(z)\varphi_p(z), \quad \zeta\in B,$$

где выбрана ветвь логарифма, обращающаяся в нуль при $\zeta=\infty$.

Следствие 2. *Пусть $f(z)\in\Sigma(B;\ q)$ и x_p, $p=1, 2, \ldots,$ — постоянные, такие, что $0<\sum\limits_{p=1}^{\infty}|x_p|^2<\infty$. Пусть*

$$h_n(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\omega}_{n,p}\varphi_p(z).$$

Тогда

$$(1-k^2) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p(\omega_{n,p}+\tilde{\omega}_{n,p}) \right|^2 \leqslant k^2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p\omega_{n,p} \right|^2 \right). \tag{8}$$

Это неравенство, обобщающее известное в теории однолистных функций неравенство Н. А. Лебедева, И. М. Милина, Поммеренке и Дж. Дженкипса, следует из сформулированной выше теоремы при

$$Q(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\left(\ln\frac{1}{w-f(\zeta)}\right)\sum_{p=1}^{\infty}x_p\Phi_p'(\zeta)\,d\zeta,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру, принадлежащему некоторому кольцевому множеству $B_{1,R}$.

4. Сформулированные выше коэффициенты неравенства могут быть применены для нахождения оценок некоторых функционалов.

Предложение 1. *Пусть* $f(z)\in\Sigma(B;\ q)$ *и* $z,\ \zeta\in B$. *Тогда*

$$(1-k^2)\left|\ln\frac{z-\zeta}{f(z)-f(\zeta)}\right|^2+k^2\left|\ln\frac{z-\zeta}{f(z)-f(\zeta)}-R(z,\zeta)\right|^2\leqslant k^2P(z,\bar z)P(\zeta,\bar\zeta).$$

Предложение 2. *Для функций* $f(z)\in\Sigma(B;\ q)$ *при любом* $\zeta\in B$ *имеет место неравенство*

$$(1-k^2)\,|\{f(\zeta),\zeta\}|^2+k^2|\{f(\zeta),\zeta\}+6R_{z\zeta}''(\zeta,\zeta)|^2\leqslant 36\pi^2k^2K_0^2(\zeta,\bar\zeta),$$

где $\{f(\zeta),\ \zeta\}$ *— производная Шварца, а* $K_0(z,\zeta)$ *— известная ядерная функция Бергмана.*

Отмеченные неравенства легко следуют из неравенства (8) и неравенства Коши.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
21 I 1974

Сибирский металлургический институт
им. С. Орджоникидзе
Новокузнецк

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Я. Гутлянский*, ДАН, т. 212, № 3, 540 (1973). [2] *М. А. Лаврентьев*, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд. АН СССР, 1962. [3] *С. Л. Крушкаль*, Сибирск. матем. журн., т. 12, № 5, 1067 (1971). [4] *И. М. Милин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 94, 90 (1968). [5] *Л. Л. Громова, Н. А. Лебедев*, Вестн. Ленингр. унив., т. 4, № 19, 44 (1968). [6] *Г. М. Голузин*, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966. [7] *И. М. Милин*, Однолистные функции и ортонормированные системы, «Наука», 1971. [8] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1969. [9] *Н. А. Лебедев, И. М. Милин*, Матем. сб., т. 28 (70); 2, 359 (1951). [10] *Ю. Е. Аленицын*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 94, 3 (1968). [11] *Н. А. Лебедев*, Вестн. Ленингр. унив., № 7, 45 (1972).