Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 518:519.3

МАТЕМАТИКА

Ю. М. ДАНИЛИН

МЕТОДЫ СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, НЕ ТРЕБУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 1 III 1974)

1°. Пусть $x\in E^n$, $f(x)$ — строго выпуклая квадратичная функция

$$f(x)={}^1/_2(Ax,\ x)+(b,\ x)+c, \tag{1}$$

где A — симметричная матрица $n\times n$, удовлетворяющая условию $(Ax,\ x)>0$ для любого $x\neq 0$; b — вектор, c — скаляр.

Определим систему векторов r_i, $0\leqslant i\leqslant n-1$, следующим образом:

$$r_0=w_0, \quad r_i=w_i-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(w_i,\ e_j)}{(r_j,\ e_j)}r_j, \quad 1\leqslant i\leqslant n-1; \tag{2}$$

здесь $w_0,\ldots,w_{n-1}$ — произвольная система линейно независимых векторов; $e_i=f'(x_0)-f'(x_0-r_i)=Ar_i$, $x_0\in E^n$ — произвольная точка, $f'(x)$ — градиент функции $f(x)$.

Лемма 1. *Система векторов $r_0,\ \ldots,\ r_{n-1}$ — является A-ортогональной, т. е.*

$$(Ar_i,\ r_j)=(e_i,\ r_j)=0, \quad i\neq j; \quad (Ar_i,\ r_i)\neq 0. \tag{3}$$

Доказательство леммы нетрудно провести по индукции.

Наличие системы векторов $r_0,\ \ldots,\ r_{n-1}$ позволяет построить обратную матрицу A^{-1} и, следовательно, определить точку минимума x_* функции (1):

$$x_*=x_0-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f_0',\ r_i)}{(e_i,\ r_i)}r_i=x_0-A^{-1}f_0'. \tag{4}$$

Из (2), с учетом условий (3), вытекают следующие равенства:

$$(r_i,\ e_i)=(w_i,\ e_i), \quad 0\leqslant i\leqslant n-1; \tag{5}$$

$$(w_i,\ e_k)=0, \quad 0\leqslant i<k\leqslant n-1. \tag{6}$$

Наиболее просто реализуется предлагаемый алгоритм в том случае, если полагать

$$w_i=\lambda_i v_{i+1}, \quad \lambda_i\neq 0, \quad 0\leqslant i\leqslant n-1, \tag{7}$$

где v_{i+1} — единичный орт $(i+1)$-й оси координат. При этом, как следует из (6), координаты $e_k^1=e_k^2=\ldots=e_k^k=0$, $1\leqslant k\leqslant n-1$. В силу этого, с учетом (5), оказывается, что для построения векторов r_i (2) и определения точки x_* (4) требуется вычислить всего ${}^1/_2n^2+{}^3/_2n$ частных производных функций $f(x)$.

2°. Используем приведенные результаты для построения алгоритмов минимизации неквадратичных функций. Будем считать далее, что $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая сильно выпуклая функция, т. е.

$$m\|y\|^2\leqslant(f''(x)y,\ y)\leqslant M\|y\|^2, \quad m>0 \quad \forall x,\ y\in E^n. \tag{8}$$

Пусть x_k — произвольная точка, $e_i=f'(x_k)-f'(x_k-r_i)$, векторы r_i строятся по формулам (2), причем w_i выбирается в виде (7). При выполнении условий (8) из (2) вытекает, что

$$|\lambda_i|=\|w_i\|\leqslant\|r_i\|\leqslant C\|w_i\|=C|\lambda_i|, \quad C<\infty. \tag{9}$$

Учитывая еще, что система векторов r_i образует правую треугольную матрицу (поскольку $r_i^*=(r_i^1,\ldots,r_i^{i+1}, 0,\ldots,0)$; символ * означает транспонирование) и $r_i^{i+1}=\lambda_i$, нетрудно установить справедливость следующего результата.

Лемма 2. *Если Δ_r — определитель, образованный векторами $r_i/\|r_i\|$, $0\leqslant i\leqslant n-1$, то существует такая постоянная $\delta>0$, что при произвольном выборе точки x_k будет $|\Delta_r|\geqslant\delta$.*

На основании леммы 2 можно утверждать, что матрица

$$A_k^{-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{r_ir_i^*}{(r_i, e_i)} \tag{10}$$

удовлетворяет условиям

$$m_0\|y\|^2\leqslant(A_k^{-1}y,\ y)\leqslant M_0\|y\|^2, \quad m_0>0 \quad \forall y\in E^n. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь следующий алгоритм минимизации:

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_kp_k, \quad p_k=-A_k^{-1}f_k', \quad k=0,\ 1,\ldots, \tag{12}$$

где A_k^{-1} определяется в виде (10), а в качестве скалярного множителя α_k берется наибольшее значение параметра $0<\alpha\leqslant1$, при котором выполняется неравенство

$$f(x_k+\alpha p_k)-f(x_k)\leqslant\varepsilon\alpha(f_k',\ p_k), \quad 0<\varepsilon<{}^1/_2 \tag{13}$$

(более подробно проводимый способ выбора α_k описан в ([1, 2])). В силу (11) справедлива

Лемма 3. *Если $f(x)$ удовлетворяет сформулированным требованиям, то последовательность $\{x_k\}$ (12) сходится к точке минимума x_* с геометрической скоростью при произвольном выборе множителей $\lambda_i\neq0$.*

3°. Будем теперь считать, что $w_i=\lambda_k\cdot v_{i+1}$, где

$$\tilde{C}\|f_k'\|\leqslant|\lambda_k|\leqslant C\|f_k'\|, \tag{14}$$

причем постоянные $\tilde{C}>0$ и C не зависят от k. В силу сходимости последовательности (12) и условий (9), (14) при $k\to\infty$ $\|r_i\|\to0$, $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Лемма 4. *При выполнении оценок* (14) *справедливы равенства*

$$(r_i,\ e_j)=o(\|r_i\|\|e_j\|)=o\|r_i\|^2, \quad i\neq j, \quad 0\leqslant i, \quad j\leqslant n-1. \tag{15}$$

Если матрица $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, то

$$|(r_i,\ e_j)|\leqslant C\|r_i\|^3, \quad i\neq j. \tag{16}$$

Результат леммы 4 показывает, что при минимизации неквадратичной функции векторы $r_0,\ldots,r_{n-1}$ при достаточно больших k будут близки к $f''(x_k)$-ортогональным.

Лемма 5. *Если матрица A_k^{-1} определяется в виде* (10) *и выполняются условия* (15), *то $\|A_k-f_k''\|\to0$ при $k\to\infty$. При выполнении оценок* (16) $\|A_k-f_k''\|\leqslant C\|r_i\|$, $0\leqslant i\leqslant n-1$.

Доказательство леммы может быть проведено аналогично соответствующим доказательствам в ([2, 3]), если учесть, что

$$A_k^{-1}e_j=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{r_ir_i^*e_j}{(r_i, e_i)}=r_j+\eta_j, \quad 0\leqslant j\leqslant n-1,$$

причем в силу (15) $\|\eta_j\|=o\|r_j\|$, а при выполнении (16) $\|\eta_j\|\leqslant C\|r_j\|^2$.

Теорема 1. *Если $f(x)$ удовлетворяет сформулированным требованиям и множитель λ_k выбирается таким образом, чтобы выполнялись оценки* (14), *то последовательность* (12) *сходится к решению со сверхлинейной скоростью. Если матрица $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то скорость сходимости квадратичная.*

Доказательство теоремы основывается на результатах леммы 5.

4°. Рассмотрим теперь свойства процесса (12), определяя матрицу A_k^{-1} в виде

$$A_k^{-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{r_{k-i}\overset{*}{r}_{k-i}}{(r_{k-i},\,e_{k-i})}, \tag{17}$$

где векторы $r_k=r_{\xi n+j}$, $\xi=0,\,1,\,\ldots,\,0\leqslant j\leqslant n-1$, строятся по формулам

$$r_{\xi n}=w_{\xi n},\qquad r_{\xi n+j}=w_{\xi n+j}-\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(w_{\xi n+j},\,e_{\xi n+s})}{(e_{\xi n+s},\,r_{\xi n+s})}\,r_{\xi n+s}, \tag{18}$$

а вектор $w_{\xi n+j}$ выбирается в виде $w_{\xi n+j}=\lambda_{\xi n+j}v_{j+1}$.

Из (18) с учетом условий (8) вытекает

$$|\lambda_{\xi n+j}|\leqslant\|r_{\xi n+j}\|\leqslant C|\lambda_{\xi n+j}|. \tag{19}$$

Используя эти оценки, можно установить, что для определителя Δ_{r_k}, образованного векторами $r_{k-i}/\|r_{k-i}\|$, $0\leqslant i\leqslant n-1$, сохраняет силу результат леммы 2. В силу этого матрица A_k^{-1} (17) будет удовлетворять условиям (11). Следовательно, для метода (12) при построении матрицы A_k^{-1} в виде (17) сохраняет силу лемма 3, и поэтому при произвольном выборе коэффициентов λ_k при $k\to\infty$

$$\|x_{k+1}-x_k\|\to 0. \tag{20}$$

Далее будем считать, что множители λ_k выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия: при $k\to\infty$

$$|\lambda_k|\to 0, \tag{21}$$

$$0<C\leqslant|\lambda_{\xi n+j+1}|/|\lambda_{\xi n+j}|\leqslant 1,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-2, \tag{22}$$

где постоянная C не зависит от ξ.

Из (19) при выполнении (21) и (22) следует, что

$$\|r_k\|\to 0;\qquad 0<\tilde{C}\leqslant\|r_{\xi n+j+1}\|/\|r_{\xi n+j}\|\leqslant C,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-2. \tag{23}$$

Лемма 6. *При выполнении условий* (21) *и* (22) *справедливы равенства*

$$(r_{k-i},\;e_{k-j})=o(\|r_{k-i}\|\,\|e_{k-j}\|),\qquad i\neq j. \tag{24}$$

Доказательство леммы проводится по индукции, с использованием условий (20) и (23). На основании (24) можно установить, что для матрицы A_k^{-1} (17) выполняется условие $\|A_k-f_k''\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Теорема 2. *Если $f(x)$ удовлетворяет сформулированным требованиям, матрица A_k^{-1} строится по формуле* (17) *и множители λ_k удовлетворяют условиям* (21), (22), *то последовательность* (12) *при выборе α_k из условия* (13) *сходится к решению со сверхлинейной скоростью.*

5°. В алгоритмах (12), в отличие от известных методов сопряженных направлений, не требуется вычислять α_k без условия $\min\limits_{\alpha} f(x_k+\alpha p_k)$. Это объясняется тем, что построение системы сопряженных векторов (2) или (18) в принципе не связано с решением задачи минимизации $f(x)$. Начиная с некоторого k, в (12) значение $\alpha_k=1$. В этом отношении методы типа (12) аналогичны алгоритмам, изучавшимся в ([2]). В методе $\{(12), (10)\}$ на каждой итерации процесса требуется строить n сопряженных векторов r_i, в методе $\{(12), (17)\}$ на каждой итерации требуется строить лишь один вектор r_k. Поскольку скорость сходимости сравниваемых методов примерно одинакова, то эффективность метода $\{(12), (17)\}$ будет выше, чем эффективность алгоритма $\{(12), (10)\}$. Изучаемые методы, обладая скоростью сходимости, близкой к скорости метода Ньютона, требуют для своей реализации меньше вычислений на итерации. Особенно это относится к методу $\{(12), (17)\}$. Этот алгоритм также менее трудоемок и по сравнению с методами ([2]), поскольку не требует построения двойственного базиса на каждой итерации.

В заключение отметим, что, используя предложенный способ построения сопряженных векторов, можно разрабатывать и другие алгоритмы аналогичного типа.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
28 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. М. Данилин*, ДАН, т. 188, № 6 (1969). [2] *Ю. М. Данилин, Б. Н. Пшеничный*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 6, 1341 (1970). [3] *Ю. М. Данилин, Б. Н. Пшеничный*, ДАН, т. 213, № 2 (1973).