

П. Г. БАШКАРЕВ, Ю. И. КАРЛОВИЧ, А. П. НЕЧАЕВ

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 30 IV 1974)

В заметке изучаются сингулярные интегральные операторы с конечной группой сдвигов. К настоящему времени хорошо изучены сингулярные интегральные операторы с циклической группой сдвигов ^(1, 2). В работе ⁽³⁾ указаны условия нетеровости (обобщенной фредгольмовости ^(4, 5)) и вычислен индекс сингулярного интегрального оператора с коммутативной группой сдвигов, образованной двумя карлемановскими сдвигами, один из которых инволютивен. Близкие вопросы для псевдодифференциальных операторов на бесконечно дифференцируемых многообразиях изучались в работе ⁽⁶⁾.

Настоящая заметка состоит из двух частей. В первой части описывается структура конечной группы гомеоморфизмов контура Γ на себя. Во второй части для сингулярных интегральных операторов с конечной группой сдвигов вводится понятие символа и в терминах символа указываются необходимые и достаточные условия нетеровости и вычисляется индекс.

1. Пусть Γ — простой замкнутый ориентировочный контур. На контуре Γ задана конечная группа $G = \{e, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ гомеоморфизмов контура Γ на себя, сохраняющих или изменяющих ориентацию.

Свойства конечной группы гомеоморфизмов контура Γ на себя описываются следующими утверждениями.

Лемма 1. *Конечная группа гомеоморфизмов контура Γ на себя, сохраняющих ориентацию на Γ , является циклической группой.*

Лемма 2. *Любая конечная группа сохраняющих и изменяющих ориентацию гомеоморфизмов контура Γ на себя имеет вид $G = \{e, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}, \beta, \alpha\beta, \dots, \alpha^{n-1}\beta\}$, где гомеоморфизм α сохраняет ориентацию, а гомеоморфизм β изменяет ориентацию.*

Доказательство леммы 1. Пусть t_0 — произвольная точка контура Γ . Рассмотрим множество точек $\{t_0, \alpha_1(t_0), \dots, \alpha_{n-1}(t_0)\}$. В этом множестве нет совпадающих точек. Действительно, из совпадения $\alpha_i(t_0)$ и $\alpha_j(t_0)$ при $i \neq j$ следует $t_0 = \alpha_i^{-1}[\alpha_j(t_0)]$. Гомеоморфизм $\alpha_i^{-1}[\alpha_j(t)]$ сохраняет направление обхода, и точка t_0 для него является неподвижной. А так как итерация этого гомеоморфизма образует циклическую подгруппу группы G , то $\alpha_i^{-1}[\alpha_j(t)] \equiv t$ (см. ⁽⁴⁾). Следовательно, $\alpha_i(t_0) \neq \alpha_j(t_0)$. Но $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ по предположению. Итак, $\alpha_i(t_0) \neq \alpha_j(t_0)$.

За счет выбора порядка следования элементов в группе G , всегда можно добиться того, чтобы

$$t_0 < \alpha_1(t_0) < \dots < \alpha_{n-1}(t_0).$$

Покажем, что $\alpha_1^2(t_0) = \alpha_1[\alpha_1(t_0)] = \alpha_2(t_0)$. Пусть это не так, т. е. $\alpha(t_0) < \alpha_2(t_0) < \alpha_1^2(t_0)$. Тогда $t_0 < \alpha_1^{-1}[\alpha_2(t_0)] < \alpha_1(t_0)$, что невозможно. Аналогично устанавливаются соотношения $\alpha_k(t_0) = \alpha_1^k(t_0)$, из которых следует, что гомеоморфизм $\alpha_k(t) = \alpha_1^k(t)$, т. е. группа G состоит из итераций гомеоморфизма $\alpha_1(t)$.

Доказательство леммы 2. Прежде всего отметим, что подмножество группы G , состоящее из сохраняющих ориентацию гомеоморфиз-

мов, является подгруппой группы G . Эта подгруппа по ранее доказанному имеет вид $G_0 = \{e, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — все изменяющие ориентацию гомеоморфизмы из группы G . Гомеоморфизм $\beta_j, j > 1$, сохраняет ориентацию на контуре Γ и, следовательно, принадлежит подгруппе G , т. е. $\beta_j \beta_1 = \alpha_i$, откуда $\beta_j = \alpha^i \beta_1$. Полученное соотношение доказывает лемму 2.

Из леммы 2 очевидным образом следует

Лемма 3. Для того чтобы конечная группа, состоящая из сохраняющих и изменяющих ориентацию гомеоморфизмов контура Γ на себя, была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $G_1 = \{e, \beta\}$, либо $G_2 = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$.

2. Учитывая работы (1-3) и результаты п. 1 данной статьи, получаем, что к настоящему времени остались неизученными только сингулярные интегральные операторы с некоммутативными конечными группами сдвигов, структура которых описывается леммой 2. Переходим к построению теории Нётера этого класса операторов.

Обозначим через W оператор сдвига, действующий по правилу $(W\varphi)(t) = \varphi[\beta(t)]$, а через V_i — операторы сдвига, определяемые равенством $(V_i\varphi)(t) = \varphi[\alpha^i(t)]$.

Будем считать, что контур Γ является кривой Ляпунова, а производные всех сдвигов всюду на Γ отличны от нуля и принадлежат классу Гёльдера.

Рассмотрим оператор

$$K \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (a_j(t)I + b_j(t)S) V_j + \left[\sum_{j=0}^{n-1} (a_{n+j}(t)I + b_{n+j}(t)S) V_j \right] W + T, \quad (1)$$

где

$$a_i(t), b_i(t) \in C(\Gamma), \quad (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

T — вполне непрерывный оператор.

Оператор (1) действует из $L_p(\Gamma)$ в $L_p(\Gamma)$. Операторы вида (1) образуют подалгебру \hat{A} алгебры линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\Gamma)$. Через \hat{D} обозначим двусторонний идеал всех вполне непрерывных операторов.

Введем в рассмотрение блочную матрицу-функцию

$$M(t, j) = \begin{pmatrix} A_0(t) & A_1(t) & \dots & A_{n-1}(t) \\ A_{n-1}(\alpha) & A_0(\alpha) & \dots & A_{n-2}(\alpha) \\ A_{n-2}(\alpha_2) & A_{n-1}(\alpha_2) & \dots & A_{n-3}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(\alpha_{n-1}) & A_2(\alpha_{n-1}) & \dots & A_0(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} B_0(t) & B_1(t) & \dots & B_{n-1}(t) \\ B_{n-1}(\alpha) & B_0(\alpha) & \dots & B_{n-2}(\alpha) \\ B_{n-2}(\alpha_2) & B_{n-1}(\alpha_2) & \dots & B_{n-3}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(\alpha_{n-1}) & B_2(\alpha_{n-1}) & \dots & B(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_n(t) \\ a_n[\beta(t)] & a_0[\beta(t)] \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b_0(t) & b_n(t) \\ -b_n[\beta(t)] & -b_0[\beta(t)] \end{pmatrix},$$

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} a_i(t) & a_{n+i}(t) \\ a_{2n-i}[\beta(t)] & a_{n-i}[\beta(t)] \end{pmatrix}, \quad B_i(t) = \begin{pmatrix} b_i(t) & b_{n+i}(t) \\ -b_{2n-i}[\beta(t)] & -b_{n-i}[\beta(t)] \end{pmatrix}$$

для $i=1, 2, \dots, n-1$; переменная j принимает два значения: $j=\pm 1$.

Определенне. Матрицу-функцию $M(t, j)$ назовем символом оператора K .

Теорема. Фактор-алгебра \hat{A}/\hat{D} изоморфна алгебре матриц вида (2). Для того чтобы оператор K был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы символ оператора K был невырожденным. Индекс нётерова оператора K выражается через его символ формулой

$$\text{Ind } K = \frac{1}{4\pi n} \{ \arg \det [M(t, -1) \cdot M^{-1}(t, 1)] \}_T.$$

Доказательство. Положим

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i(t)I + b_i(t)S) V_i, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{n+i}(t)I + b_{n+i}(t)S) V_i.$$

Имеет место равенство (2, 7)

$$\begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ WY_2W & WY_1W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2W & 0 \\ 0 & Y_1 + Y_2W \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Операторы $Y_1 + Y_2W$ и $Y_1 - Y_2W$ связаны между собой соотношением

$$S(Y_1 + Y_2W) = (Y_1 - Y_2W) + T_1, \quad (4)$$

где T_1 — вполне непрерывный оператор.

Равенство (4) означает, что операторы $Y_1 + Y_2W$ и $Y_1 - Y_2W$ могут быть нётеровыми только одновременно. А из равенств (3) и (4) следует, что оператор $K = Y_1 + Y_2W$ нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор

$$K_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ WY_2W & WY_1W \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{Ind } K = 1/2 \text{ Ind } K_1.$$

Оператор K содержит только сохраняющий ориентацию сдвиг $\alpha(t)$ и его итерации, т. е. является оператором с конечной циклической группой сдвигов, сохраняющих ориентацию.

Для операторов вида K_1 в работе (2) введено понятие символа и в терминах символа указано необходимое и достаточное условие нётеровости и вычислен $\text{Ind } K_1$. Учитывая этот результат, окончательно получаем утверждение теоремы.

Заметим, что методы настоящей заметки применимы для случая, когда контур Γ состоит из конечного числа простых замкнутых непересекающихся дуг Ляпунова, а группа G гомеоморфизмов контура Γ переводит каждую его компоненту на себя.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Г. С. Литвинчуку и В. Г. Кравченко за обсуждение работы и полезные советы.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
26 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, 563 (1967); т. 32, 1414 (1968).
² В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук, Укр. матем. журн., т. 25, 4, 544 (1973). ³ А. С. Сосунов, Матер. Всесоюзн. конфер. по красивым задачам, Казань, 1970, стр. 245.
⁴ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, 141 (1943). ⁵ Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., т. 27 (70), 1, 3 (1951). ⁶ А. Б. Антонович, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, 3, 663 (1973). ⁷ И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 7, 1, 3 (1973).