Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 624.07:534.1 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, В. Е. ПОПОВИЧ

ТЕОРЕМА КАСТИЛИАНО И МЕТОД ЕДИНИЧНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ СПЛОШНЫХ СРЕД

1. Энергетические теоремы. Луиджи Федерико Менабреа впервые при рассмотрении статически неопределимых ферм с идеальными шарнирами использовал начало наименьшей работы, полагая, что лишние неизвестные обращают в минимум потенциальную энергию деформации фермы. Эта работа [1] была доложена в 1857 г. Туринской Академии наук. В развитие этой статьи Альберто Пио Кастилиано в дипломной работе на звание инженера [2] дал обоснование метода и применил его к ряду задач строительной механики. Эти материалы были опубликованы в виде двух мемуаров [3, 4]. Несколько позднее в 1879 г. А. Кастилиано издал работу на французском языке [5], в которой привел полное доказательство его известных теорем и указал различные примеры их применения.

По первой теореме Кастилиано $\partial U/\partial\delta_k=P_k$, где U — потенциальная энергия деформации упругой системы, δ_k — проекция вектора перемещения точки приложения силы на направление силы.

Вторая теорема показывает, что производная от потенциальной энергии деформации, как функции независимых сил P, по любой из них дает соответствующее перемещение точки приложения силы $\partial U/\partial P_k=\delta_k$.

Пользуясь этими результатами, Кастилиано дал доказательство началу наименьшей работы.

Вторая теорема, раскрывающая метод определения перемещений, нашла широкое применение в механике деформируемого тела. Однако обе теоремы выведены в предположении линейной зависимости между нагрузкой и деформациями. Для применения теоремы к задачам с нелинейной связью между усилиями и перемещениями Фридрих Энгессер [6] ввел понятие дополнительной потенциальной энергии. Им показано, что в общем случае перемещение по направлению силы равно производной от дополнительной энергии деформации по силе. Этот вывод находится в соответствии с принципом минимума дополнительной энергии деформации, сформулированным в работе Энгессера [6] и Франческо Кротти [7]. Применение этого принципа к задачам термоупругости излагается в работе [8]. Выводу вариационных уравнений термоупругости посвящена статья [9]. В настоящей работе дается формулировка теоремы Кастилиано для случая температурных деформаций.

2. Теорема взаимности работ. Для ненагретого упругого тела при действии на него нескольких сил эта теорема была сформулирована Е. Бетти [10] и Рэлеем [11, 12]. Обобщение теоремы на случай температурных деформаций сделано В. М. Майзелем в работе [13]. В соответствии с этой теоремой

$$\iint\limits_S (P',\delta)\,dS+\iiint\limits_V (Q',\delta)\,dV+\frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint\limits_V T'\theta\,dV=$$

$$=\iint\limits_S (P,\delta')\,dS+\iiint\limits_V (Q,\delta')\,dV+\frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint\limits_V T\theta'\,dV. \qquad (1)$$

В уравнении (1) связаны параметры двух состояний закрепленного упругого тела. P', Q', δ', T' — поверхностные, объемные силы, перемещения и температура одного состояния тела соответственно; без штрихов эти же величины второго состояния. Считаются справедливыми формулы закона Гука. Модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν, коэффициент температурного расширения материала α не зависят от температуры. θ — относительная объемная деформация,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

u, v, w — компоненты вектора перемещения.

Для упрощения записи примем объемные силы равными нулю. Поверхностные силы будем считать сосредоточенными, тело в первом состоянии ненагретым ($T'=0$). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\sum_i P_i'\delta_i = \sum_j P_j\delta_j' + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint_V T\theta'\,dV; \tag{2}$$

здесь θ' — относительная объемная деформация первого состояния.

3. Вторая теорема Кастилиано. Пусть тело во втором состоянии нагружено системой внешних сил и неравномерно нагрето (температура в каждой точке равна T). В первом состоянии тело не нагревается, но нагружается силой dP_k, являющейся главной частью приращения силы $P_{j=k}$ второго состояния. Применяя теорему взаимности (2), в этом случае получим

$$\delta_k\,dP_k = \sum_j P_j\delta_j' + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint_V T\theta'\,dV. \tag{3}$$

Но работа сил P_j на перемещениях δ_j' в ненагретом теле от силы dP_k численно равна изменению потенциальной энергии деформации ненагретой системы по силе

$$\sum_j P_j\delta_j' = \frac{\partial U}{\partial P_k}dP_k. \tag{4}$$

Величина

$$\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial P_k}dP_k; \tag{5}$$

здесь $\theta=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z$ определяется только от заданных сил без учета нагрева.

Подставляем (4) и (5) в уравнение (3) и разрешаем его относительно δ_k. В результате получим

$$\delta_k = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[U + \frac{\alpha E}{1-2\nu}\iiint_V T\theta\,dV\right]. \tag{6}$$

Уравнение (6) представляет собой обобщение второй теоремы Кастилиано на случай температурных деформаций упругого тела.

Стержневая система. Запишем уравнение (6) для стержневой системы, каждый элемент которой испытывает в общем случае деформацию изгиба, растяжения, сжатия и кручения. Совместим ось x с осью стержня в данной точке контура. Тогда продольная относительная деформация будет равна $\varepsilon_x=\sigma_x/E$, где σ_x — нормальное напряжение в точке поперечного сечения стержня ненагретой системы от действия сил P_j. $\varepsilon_y=$ $=\varepsilon_z=-\nu\sigma_x/E$. Следовательно,

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_x.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (6) приводит к формулировке второй теоремы Кастилиано для нагретой комбинированной стержневой системы

$$\delta_k = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[U + \iiint\limits_V \alpha T \sigma_x \, dV\right]. \tag{7}$$

Проекция вектора перемещения точки приложения силы на ее направление равна частной производной по силе от суммы потенциальной энергии деформации системы и интеграла по объему от произведения относительной линейной температурной деформации αT на величину нормального напряжения σ_x.

4. Интеграл единичной нагрузки, интеграл Мора. Метод фиктивной единичной нагрузки разрабатывался Джеймсом Клерком Максвеллом ([14]) и Отто Христианом Мором ([15]). С помощью теоремы Кастилиано (7) легко получить интеграл единичной нагрузки, определяющий смещение точки нагретой пространственной рамы или комбинированной стержневой системы. Если учесть, что $\partial\sigma_x/\partial P_k = \sigma'$, где σ' — нормальное напряжение в точке поперечного сечения от действия единичной силы, приложенной вместо силы P_k, то уравнение (7) можно записать в виде

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} + \iiint\limits_V \alpha T \sigma' \, dV. \tag{8}$$

Как известно, использование первого слагаемого в формуле (8) приводит к интегралу Мора ([15]), определяющему смещение точки от действия внешних сил ненагретой системы. Из второго слагаемого непосредственно получается формула

$$\delta_{kt} = \iiint\limits_V \alpha T \sigma' \, dV = \int\limits_s \frac{N_1 N_t}{EF} ds + \int\limits_s \frac{M_{z1} M_{zt}}{EJ_z} ds + \int\limits_s \frac{M_{y1} M_{yt}}{EJ_y} ds, \tag{9}$$

где интегралы берутся по контуру стержневой системы; здесь F, J_z, J_y — площадь и моменты инерции поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей z, y. N_1, M_{z1}, M_{y1} — нормальная сила и изгибающие моменты в сечении от действия единичной силы, приложенной в точке, смещение которой определяется,

$$N_t = \iint\limits_F \alpha E T \, dF, \quad M_{zt} = \iint\limits_F \alpha E T y \, dF, \quad M_{yt} = \iint\limits_F \alpha E T z \, dF.$$

Как видно, выражение (9) представлено в форме слагаемых интеграла Мора, определяющего перемещение при действии сил, и дополняет его для случая температурных деформаций упругой системы.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
25 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. F. Ménabréa*, C. R., v. 46, 1056 (1858). [2] *A. Castigliano*, Intorno ai sistemi elastici. Diss. Turin, 1873, p. 52. [3] *A. Castigliano*, Atti Reall Accad. Sci. Torino, v. 10, 380 (1875). [4] *A. Castigliano*, ibid., v. 11, 127 (1876). [5] *A. Castigliano*, Théorie de l'équilibre des systémes élastiques et applications, 1879, p. 480. [6] *F. Engesser*, Zs. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, B. 35, 733 (1889). [7] *F. Crotti*, La teoria dell' elasticita né suoiprincipi fondamentali e nelle sue applicazioni pratiche all costruzioni, Milan, 1888. [8] *В. И. Климов*, В сб. Вопр. прочности элементов авиационных конструкций, Тр. Куйбышевск. авиацион. ин-та, в. 60, 17 (1973). [9] *Л. И. Балабух, Л. А. Шаповалов*, ПММ, т. 24, в. 4, 703 (1960). [10] *E. Betti*, Nuovo Cimento, Ser. 2, v. 7–8 (1872). [11] *Rayleigh*, Phil. Mag., Ser. 4, v. 48, 452 (1874). [12] *J. W. Strutt* (Rayleigh), The Theory of Sound, v. 1, 1877; v. 2, 1878. [13] *В. М. Майзель*, Температурная задача теории упругости, Киев, 1951. [14] *J. C. Maxwell*, Phil. Mag., Ser. 4, v. 27, 294 (1964). [15] *O. Mohr*, Zs. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, B. 20, № 2, 223 (1874).