

В. Г. МАЗЬЯ, Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ

**О КОЭФФИЦИЕНТАХ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВБЛИЗИ
КОНИЧЕСКИХ ТОЧЕК**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 V 1973)

1°. В работе В. А. Кондратьева (1) были доказаны теоремы Нётера (в некоторых гильбертовых пространствах) для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками и получены асимптотические формулы для решений в окрестности особых точек. Эти формулы содержат линейные комбинации собственных и присоединенных функций операторного пучка, определяемого поведением границы области и коэффициентов краевой задачи вблизи особенности. Зависимость асимптотики от данных задачи в целом проявляется только в значениях коэффициентов линейных комбинаций. В настоящей статье приводятся формулы для этих коэффициентов (теорема 3). Потребность в их вычислении возникает, в частности, при решении различных прикладных задач (см., например, (2), гл. II), но в сколько-нибудь общей ситуации этот вопрос не изучался.

Другие результаты работы — теоремы о нётеровости в весовых пространствах, порожденных нормами в L_p и в классах Гёльдера.

2°. Область, функциональные пространства и краевая задача. Пусть G — открытое подмножество R^n с компактным замыканием \bar{G} и границей ∂G . Предположим, что существует конечное множество \mathcal{K} точек $x^{(q)} \in \partial G$, $q=1, \dots, Q$, такое, что $\partial G \setminus \mathcal{K}$ является гладким $(n-1)$ -мерным подмногообразием R^n . Допустим еще, что каждая точка $x^{(q)} \in \mathcal{K}$ имеет окрестность $U^{(q)}$ в R^n , диффеоморфную открытому единичному шару \mathcal{D}^n ; образом множества $U^{(q)} \cap \bar{G}$ при этом диффеоморфизме является $\mathcal{D}^n \cap K_q^n$, где K_q^n — замкнутый n -мерный конус. Вершина конуса K_q^n и центр шара \mathcal{D}^n совпадают с началом координат, и K_q^n вырезает на сфере $S^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n$ область Ω_q с гладкой границей.

Сопоставим точке $x^{(q)}$ вещественное число β_q и обозначим через β вектор с компонентами $\{\beta_1, \dots, \beta_Q\}$. Введем пространство $V_{p, \beta^{(s)}}$ функций на G , норма в котором склеивается с помощью разложения единицы из локальных норм. Для функций u с носителями в окрестности $U^{(q)}$ норма равна сумме

$$\|r^{\beta_q} u\|_{W_p^{(s)}(G)} + \|r^{\beta_q - s} u\|_{L_p(G)},$$

где $W_p^{(s)}(G)$ — пространство С. Л. Соболева порядка $s=1, 2, \dots$. Для функций u , носители которых не содержат точек из \mathcal{K} , локальная норма совпадает с нормой в $W_p^{(s)}(G)$. Через $\partial V_{p, \beta}^{(s)}$ обозначим пространство следов на $\partial G \setminus \mathcal{K}$ функций из $V_{p, \beta}^{(s)}$. Введем еще пополнение $C_{\beta}^{(s, \alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, множества гладких функций с носителями в $\bar{G} \setminus \mathcal{K}$ по норме, которая получается из локальных норм вида

$$\|r^{\beta_q} u\|_{C^{(s, \alpha)}(\bar{G})} + \|r^{\beta_q - s - \alpha} u\|_{C(\bar{G})}, \quad \text{supp } u \subset U^{(q)}, \quad 1 \leq q \leq Q.$$

Если $\text{supp } u \cap \mathcal{K} = \emptyset$, то норма u в $C_{\beta}^{(s, \alpha)}$ эквивалентна норме в $C^{(s, \alpha)}$. Аналогично определяется пространство $C_{\beta}^{(s, \alpha)}(\partial G)$.

Пусть P — скалярный дифференциальный оператор порядка m в области G с коэффициентами из $C^\infty(\bar{G} \setminus \mathcal{K})$. Будем рассматривать только

операторы P , допускающие в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{X}$ представление

$$P(x, D_x) = \sum_{|\gamma| \leq m} p_\gamma(x) D_x^\gamma, \quad p_\gamma(x) = r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}(r, \omega),$$

где (r, ω) — локальные сферические координаты с началом в x , а функции $p_\gamma^{(0)}(r, \omega)$ удовлетворяют условию

$$r^k D_r^k D_\omega^\mu p_\gamma^{(0)}(r, \omega) \in C([0, \delta] \times \bar{\Omega}_q), \quad k=0, 1, \dots; |\mu|=0, 1, \dots; \delta > 0. \quad (1)$$

Главной частью $P^{(0)}$ оператора P в точке $x^{(0)}$ будем называть оператор в конусе K_q^n , полученный из P заменой коэффициентов $p_\gamma(x)$ на $r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}(0, \omega)$.

Пусть \mathcal{L} и \mathcal{B} — матричные дифференциальные операторы в области G размеров $k \times k$ и $m \times k$ соответственно, с элементами \mathcal{L}_{hj} и \mathcal{B}_{hj} , $\text{ord } \mathcal{L}_{hj} \leq s_h + t_j$, $\text{ord } \mathcal{B}_{hj} \leq \sigma_h + t_j$, где s_h, σ_h, t_j — целые числа такие, что $s_1 + t_1 + \dots + s_k + t_k = 2m$. Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}u)(x) = f(x), \quad x \in G; \quad (\mathcal{B}u)(x) = g(x), \quad x \in \partial G \setminus \mathcal{H}, \quad (2)$$

где

$$u = \{u_1, \dots, u_k\}, \quad f = \{f_1, \dots, f_k\}, \quad g = \{g_1, \dots, g_m\}.$$

Предположим, что оператор \mathcal{L} эллиптический на $\bar{G} \setminus \mathcal{H}$ в смысле Дуглеса — Ниренберга и что краевые условия накрывают \mathcal{L} на множестве $\partial G \setminus \mathcal{H}$. Запишем операторы $\mathcal{L}_{hj}^{(0)}$, $\mathcal{B}_{hj}^{(0)}$ в конусе в виде

$$\mathcal{L}_{hj}^{(0)} = r^{-(s_h+t_j)} L_{hj}(\omega; rD_r, D_\omega), \quad \mathcal{B}_{hj}^{(0)} = r^{-(\sigma_h+t_j)} B_{hj}(\omega; rD_r, D_\omega)$$

и введем оператор $\mathfrak{A}_q(\lambda) = \{L(\lambda), B(\lambda)\}_q$ краевой задачи с параметром λ в области Ω_q , $q=1, \dots, Q$; здесь

$$L(\lambda) = \|L_{hj}(\omega; \lambda - it_j, D_\omega)\|_{h,j=1}^k,$$

и аналогично определяется матрица $B(\lambda)$. Потребуем, чтобы операторы $\mathfrak{A}_q(\lambda)$ были эллиптическими в смысле М. С. Аграновича — М. И. Вишика⁽³⁾.

В дальнейшем предполагается, что имеет место формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_G + \sum_{h=1}^m \langle \mathcal{B}_h u, \mathcal{T}_h v \rangle_{\partial G} = (u, \mathcal{L}^* v)_G + \sum_{h=1}^m \langle \mathcal{P}_h u, \mathcal{C}_h v \rangle_{\partial G} \quad (3)$$

для любых гладких векторов u, v , равных нулю вблизи множества \mathcal{H} . Здесь $\mathcal{B}_h u = \mathcal{B}_{h1} u_1 + \dots + \mathcal{B}_{hk} u_k$, аналогичный смысл имеют обозначения $\mathcal{T}_h v$, $\mathcal{P}_h u$ и $\mathcal{C}_h v$; $\text{ord } \mathcal{B}_{hj} + \text{ord } \mathcal{T}_{hj} \leq s_i + t_j - 1$, $\text{ord } \mathcal{P}_{hi} + \text{ord } \mathcal{C}_{hj} \leq s_i + t_j - 1$. Условия справедливости формулы Грина изучены в^(4, 5).

Будем считать далее, что краевая задача, сопряженная с задачей (2) относительно формулы Грина, обладает теми же свойствами, что и задача (2).

3°. Нётеровость краевой задачи.

Теорема 1. Пусть вектор β таков, что прямая $\text{Im } \lambda = \beta_q + n/p - s$ не содержит собственных чисел операторного пучка $\mathfrak{A}_q(\lambda)$, $q=1, \dots, Q$.

Тогда оператор краевой задачи (2)

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathcal{V}_{p, \beta}^{(s+t)} \rightarrow \mathcal{V}_{p, \beta}^{(s-s)} \times \partial \mathcal{V}_{p, \beta}^{(s-\sigma)}; \quad (4)$$

$$\mathcal{V}_{p, \beta}^{(s+t)} = \prod_{j=1}^k V_{p, \beta}^{(s+t_j)}, \quad \partial \mathcal{V}_{p, \beta}^{(s-\sigma)} = \prod_{h=1}^m \partial V_{p, \beta}^{(s-\sigma_h)},$$

является нётеровым.

Теорема 2. Пусть вектор β таков, что прямая $\text{Im } \lambda = \beta_q - s - \alpha$ не содержит собственных чисел оператора $\mathfrak{A}_q(\lambda)$, $q=1, \dots, Q$.

Тогда оператор

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathcal{C}_\beta^{(s+t, \alpha)} \rightarrow \mathcal{C}_\beta^{(s-s, \alpha)} \times \mathcal{C}_\beta^{(s-\sigma, \alpha)} (\partial G)$$

является негермитовым; здесь, например, $\mathcal{C}_\beta^{(s-s, \alpha)} = \prod_{h=1}^k C_\beta^{(s-s_h, \alpha)}$.

4°. Асимптотика решения краевой задачи (2). Пусть \mathcal{H}' — непустое подмножество множества \mathcal{H} . Назовем допустимым такой скалярный дифференциальный оператор P (порядка m), для коэффициентов которого в окрестности каждой точки $x^{(q)} \in \mathcal{H}'$ справедливо представление

$$p_\gamma(x) = r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}(0, \omega) + r^{|\gamma|-m+\delta} p_\gamma^{(1)}(r, \omega), \quad \delta = \text{const} > 0,$$

где функции $p_\gamma^{(1)}(r, \omega)$ удовлетворяют условиям (1). Впредь рассматриваются матричные операторы \mathcal{L} и \mathcal{B} с допустимыми элементами.

Далее мы будем говорить только о шкале пространств $V_{p, \beta}^{(s)}$; все результаты с очевидными изменениями переносятся на шкалу $C_\beta^{(s, \alpha)}$.

В случае $\beta_q' \leq \beta_q$, $q=1, \dots, Q$, будем писать $\beta' \prec \beta$, где $\beta' = \{\beta_1', \dots, \beta_Q'\}$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_Q\}$. Функции v_1, \dots, v_r , принадлежащие пространству $\mathcal{Y}_{p, \beta}^{(s+t)}$, назовем линейно независимыми по модулю $\mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s-t)}$, $\beta' \prec \beta$, если из условия $c_1 v_1 + \dots + c_r v_r \in \mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s-t)}$, $c_j = \text{const}$, следует, что $c_1 = \dots = c_r = 0$.

Пусть $\lambda_{1, q}, \dots, \lambda_{r, q}$ — собственные числа пучка $\mathfrak{A}_q(\lambda)$, расположенные в полосе

$$-s + \beta_q' + n/p < \text{Im } \lambda < -s + \beta_q + n/p, \quad 0 < \beta_q - \beta_q' < \min\{\delta, 1\},$$

прямые $\text{Im } \lambda = -s + \beta_q' + n/p$, $\text{Im } \lambda = -s + \beta_q + n/p$ не содержат собственных чисел $\mathfrak{A}_q(\lambda)$, а q принимает все такие значения, что $x^{(q)} \in \mathcal{H}'$. Через $\kappa_{j, q}$

обозначим алгебраическую кратность числа $\lambda_{j, q}$, а через $\Psi_{j, q}^{(0, \mu)}(\omega), \dots, \Phi_{j, q}^{(\kappa_{j, q}^{(0, \mu)} - 1, \mu)}$, $\mu=1, \dots, M_{j, q}$ — жордановы цепочки пучка $\mathfrak{A}_q(\lambda)$, отвечающие

числам $\lambda_{j, q}$, $\kappa_{j, q}^{(1)} + \dots + \kappa_{j, q}^{(M_{j, q})} = \kappa_{j, q}$. Пусть $\mathfrak{A}_q^*(\bar{\lambda})$ — пучок, сопряженный с пучком $\mathfrak{A}_q(\lambda)$ относительно формулы Грина в Ω_q , порожденной формулой (3):

$$\begin{aligned} & (L(\lambda)u, v)_{\Omega_q} + \sum_{h=1}^m \langle B_h(\lambda)u, T_h(\bar{\lambda})v \rangle_{\partial\Omega_q} = \\ & = (u, L^*(\bar{\lambda})v)_{\Omega_q} + \sum_{h=1}^m \langle S_h(\lambda)u, C_h(\bar{\lambda})v \rangle_{\partial\Omega_q}. \end{aligned}$$

Через $\Psi_{j, q}^{(0, \mu)}(\omega), \dots, \Phi_{j, q}^{(\kappa_{j, q}^{(1)} - 1, \mu)}(\omega)$ обозначим жордановы цепочки пучка $\mathfrak{A}_q^*(\bar{\lambda})$, отвечающие собственному числу $\bar{\lambda}_{j, q}$. Эти цепочки можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия «ортогональности»:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^k \sum_{\mu=v+1}^{\mu+v+1} \left(\frac{1}{p!} L^{(p)}(\lambda_{j, q}) \Phi_{j, q}^{(k-v, s)}, \Psi_{j, q}^{(\mu-p+v+1, t)} \right)_{\Omega_q} + \\ & + \sum_{g=1}^m \sum_{v=0}^k \left\langle \sum_{l=v+1}^{\mu+v+1} \frac{1}{l!} B_g^{(l)}(\lambda_{j, q}) \Phi_{j, q}^{(k-v, s)}, \right. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=\nu}^{\mu+\nu+1-l} \frac{1}{h!} T_g^{(h)} (\bar{\lambda}_{i,q}) \psi_{i,q}^{(\mu+\nu+1-l-h, l)} \rangle_{\partial \Omega_q} = \delta_{i,j} \delta_{s,t} \delta_{\kappa_q^{(s)} - k - t, \mu}.$$

Введем функции

$$u_{\mu, h}^{(j, q)} = r^{i \lambda_{i, q} + t} \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \left(i \ln \frac{1}{r} \right)^h \varphi_{j, q}^{(k-h, \mu)}(\omega), \quad k=0, \dots, \kappa_{j, q}^{(\mu)} - 1,$$

$$v_{\mu, k}^{(j, q)} = r^{i \lambda_{j, q} - n + s} \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \left(i \ln \frac{1}{r} \right)^h \psi_{j, q}^{(k-h, \mu)}(\omega);$$

здесь $r^s u = \{r^s u_1, \dots, r^s u_k\}$, аналогичный смысл имеет символ $r^s v$.

Упорядочим функции $u_{\mu, h}^{(j, q)}$ произвольным образом: $U_1, \dots, U_\kappa = \sum \kappa_{j, q}$. Соответственно упорядочим функции $v_{\mu, k}^{(j, q)}$: через V_p обозначается функция $v_{\mu, \kappa_{j, q}^{(\mu)} - k - 1}^{(j, q)}$, если $U_p = u_{\mu, k}^{(j, q)}$.

Пусть однородная задача (2) имеет N решений из $\mathcal{Y}_{p, \beta}^{(s+t)}$ линейно независимых по модулю $\mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s+t)}$. Ясно, что $0 \leq N \leq \kappa$. Обозначим эти решения через z_1, \dots, z_N . Для каждой из этих функций справедливо сравнение

$$z_\mu \equiv \eta_{\mathcal{K}'} \sum_{\nu=1}^{\kappa} c_{\mu, \nu} U_\nu \pmod{\mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s+t)}}, \quad \mu = 1, \dots, N,$$

где $\eta_{\mathcal{K}'}$ — функция из $C^\infty(\bar{G})$ с носителем, сосредоточенным в окрестности множества \mathcal{K}' ; вблизи от \mathcal{K}' функция $\eta_{\mathcal{K}'}$ равна единице. Не ограничивая общности, можно считать, что $c_{\mu, \nu} = \delta_{\mu, \nu}$ при $\mu, \nu = 1, \dots, N$. Пусть τ — целое число, $(-\beta + \tau) = \{-\beta_1 + \tau, \dots, -\beta_q + \tau\}$, $\tau \geq s + t_j$, $1 \leq j \leq k$. Существует $\kappa - N$ решений ζ_μ однородной задачи, сопряженной с задачей (2) относительно формулы Грина, $\mathcal{Y}_{p', (-\beta' + \tau)}^{(\tau - s + s)}$ $\equiv \zeta_\mu$, линейно независимых по модулю $\mathcal{Y}_{p', (-\beta' + \tau)}^{(\tau - s + s)}$. Для каждой из этих функций справедливо сравнение

$$\zeta_\mu \equiv \eta_{\mathcal{K}'} \sum_{\nu=1}^{\kappa} d_{\mu, \nu} V_\nu \pmod{\mathcal{Y}_{p', (-\beta' + \tau)}^{(\tau - s + s)}}.$$

Можно считать, что $d_{\mu, \nu} = \delta_{\mu, \nu - N}$, $\nu = N + 1, \dots, \kappa$.

Теорема 3. Пусть $u \in \mathcal{Y}_{p, \beta}^{(s+t)}$ — решение задачи

$$(\mathcal{L}u)(x) = f(x), \quad x \in G, \quad f \in \mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s-s)}; \quad (\mathcal{B}u)(x) = g(x), \quad x \in \partial G \setminus \mathcal{K}, \quad g \in \partial \mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s-g)}.$$

Тогда существует единственная линейная комбинация z функций z_1, \dots, z_N такая, что

$$u - z \equiv \eta_{\mathcal{K}'} \sum_{k=N+1}^{\kappa} c_k U_k \pmod{\mathcal{Y}_{p, \beta'}^{(s+t)}},$$

где

$$c_k = (f, \zeta_k)_G + \sum_{h=1}^m \langle g_h, \mathcal{F}_h \zeta_k \rangle_{\partial G}.$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 V 1973

Ленинградский институт текстильной и
легкой промышленности
им. С. М. Кирова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Кондрагеев, Тр. Московск. матем. общ., т. 16, 209 (1967). ² Л. И. Седов, Механика сплошной среды, «Наука», 1970. ³ М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, т. 19, 3, 53 (1964). ⁴ Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Матем. сб., т. 78, 3, 446 (1969). ⁵ Я. А. Ройтберг, Матем. сб.: т. 83, 2, 181 (1970).