

В. И. ПОЛЕЖАЕВ, В. Л. ГРЯЗНОВ

**МЕТОД РАСЧЕТА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
НАВЬЕ — СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ «ВИХРЬ, ФУНКЦИЯ ТОКА»**

(Представлено академиком Г. И. Петровым 23 I 1974)

1. Запишем исходные уравнения с учетом переноса тепла естественной конвекцией в безразмерном виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad Gr = \frac{g \beta L^3}{\nu^2} (T_2 - T_1), \quad (1,1)$$

$$\Delta \psi = \omega, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad (1,2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \quad \theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}. \quad (1,3)$$

Функция тока ψ и вихрь ω определены соотношениями

$$\partial \psi / \partial x = -v, \quad \partial \psi / \partial y = u, \quad \omega = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x,$$

где u и v — проекции вектора скорости на оси x , y соответственно, t — безразмерное время, θ — безразмерная температура, Gr , Pr — числа Грасгофа и Прандтля соответственно, T_2 , T_1 — температуры изотермических поверхностей. В качестве масштабов взяты: масштаб длины L , времени L^2/ν , скорости ν/L , температуры $T_2 - T_1$.

Рассмотрим краевую задачу о конвекции в замкнутой двумерной области, на границе которой заданы условия прилипания

$$\psi = 0, \quad \partial \psi / \partial n |_{\partial \Omega} = 0. \quad (1,4)$$

Для определенности будем полагать, что две боковые поверхности поддерживаются при заданных температурах, а две других поверхности теплоизолированы:

$$\theta(0, y) = 1, \quad \theta(1, y) = 0, \quad \partial \theta(x, 0) / \partial y = \partial \theta(x, 1) / \partial y = 0. \quad (1,5)$$

2. Постановка задачи (1,1) — (1,5), как и многих других задач для системы ω , ψ вязкой несжимаемой жидкости, обладает той особенностью, что граничные условия задаются для функции тока, а не для вихря, который, согласно (1,2), определен лишь внутри области. Для преодоления этой трудности используются различные подходы, обоснование которых имеет, как правило, эвристический характер. Чаще всего, следуя первоначальной работе Тома (1), применяют приближенные граничные условия для вихря, которые могут быть получены путем разложения в ряд функции тока вблизи границы с учетом уравнения (1,2) и условий (1,4); при этом предполагается, что уравнение (1,2) справедливо и на границе области. Наибольшее распространение имеют следующие формулы первого и второго порядка точности относительно вихря на границе (1-4):

$$\omega_3 = 2 \frac{\psi_1 - \psi_0}{h^2} - \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 + O(h), \quad (2,1)$$

$$\omega_0 + \frac{\omega_1}{2} = \frac{3(\psi_1 - \psi_0)}{h^2} - \frac{3}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 + O(h^2), \quad (2,2)$$

$$\omega_0 = \frac{-7\psi_0 + 8\psi_1 - \psi_2}{2h^2} - \frac{3}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 + O(h^2). \quad (2,3)$$

Для получения расчетных формул производная $(\partial\psi/\partial n)_0$ в выражениях (2,1) — (2,3) заменяется нулем в соответствии с граничным условием (1,4); таким образом, при использовании этих формул исходное условие прилипания выполняется косвенно, в соответствии с выражениями

$$\frac{2}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = O(h), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = O(h^2); \quad (2,4)$$

$$\frac{3}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = O(h^2), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 = O(h^3). \quad (2,5)$$

Отсюда следует, что аппроксимация условий прилипания на порядок выше, чем вихря. Отметим, что в соответствии с (2,4) — (2,5) требуется высокая гладкость решения. Использование граничных условий этого типа для уравнений (1,1) — (1,3) при больших числах Рэлея ($Ra = Gr \cdot Pr$) и на подробных сетках, как следует из многих работ (см., например, ^(5, 6)), связано со значительными ограничениями на временной шаг и замедлением сходимости, в связи с чем применение экономичных неявных схем в сочетании с этими условиями никогда не было достаточно эффективным.

В практике вычислений находит также применение метод ⁽⁷⁻⁹⁾, согласно которому вихрь на границе записывается в виде

$$\omega_0^{s+1} = \omega_0^s + \sigma_0 (\partial\psi/\partial n)_0, \quad (2,6)$$

где s — итерационный индекс, σ_0 — итерационный параметр, скалярный или операторный.

Формулу (2,6) можно интерпретировать как применение метода последовательных приближений для решения операторного уравнения, связывающего вихрь и функцию тока на границе:

$$F(\omega_0) = (\partial\psi/\partial n)_0 = 0. \quad (2,7)$$

В работе ⁽¹⁰⁾ получено интегральное уравнение для вихря, имеющего аналогичный смысл. В отличие от (2,1) — (2,3), выполнение исходного условия прилипания (1,4) на стационарном режиме, согласно (2,6), зависит от точности аппроксимации на границе производной и точности стационарирования вихря. Метод (2,6) при $\sigma_0 = \text{const}$, как показывает опыт расчетов, часто приводит даже к более медленной сходимости, чем (2,1) — (2,3), причем при уменьшении вязкости сходимость сильно замедляется или вообще отсутствует.

3. Рассмотрим один простой метод расчета граничных условий, пригодный для стационарных и нестационарных задач и обладающий, в сочетании с неявными схемами типа переменных направлений ^(5, 6), значительно более быстрой сходимостью по сравнению с методами (2,1) — (2,3) и (2,6).

Идея метода состоит в том, чтобы граничное условие для вихря ставить не на границе, а внутри основной области, где вихрь определен согласно (1,2). Таким образом, связь между вихрем и функцией тока с помощью (1,2) переносится с границы внутрь области. Уравнение для вихря (1,1) решается во вспомогательной области Ω_1 , расположенной внутри основной области Ω_0 ; граница Ω_1 отстоит от границы основной области на один шаг сетки. Другая особенность метода состоит в том, что условие прилипания $(\partial\psi/\partial n)_0 = 0$ реализуется на каждом временном шаге непосредственно на границе основной области Ω_0 . При этом существенно, что последнее усло-

вие и условие для вихря ставятся на различных границах, так как использование этих двух условий на одной и той же границе переопределяет задачу и при численной реализации может приводить к существенному снижению точности.

Последовательность расчета такова. Из уравнения (1,2) при заданном поле функции тока $\psi^s(x, y)$ определяется значение вихря ω_i^{s+1} на границе области Ω_1 . Для этого может быть использована обычная схема:

$$\omega_{i,j}^{s+1} = \frac{\psi_{i+1,j}^s - 2\psi_{i,j}^s + \psi_{i-1,j}^s}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^s - 2\psi_{i,j}^s + \psi_{i,j-1}^s}{l^2}. \quad (3,1)$$

Далее, решая уравнение (1,1) в области Ω_1 с граничным условием ω_i^{s+1} , определяем поле вихря $\omega^{s+1}(x, y)$. Затем в основной области Ω_0 находим поле функции тока $\bar{\psi}^{s+1}(x, y)$. Для этого решается уравнение (1,2) с граничным условием $\psi_0=0$. Однако поле $\bar{\psi}^{s+1}(x, y)$ еще не удовлетворяет условию прилипания $(\partial\psi/\partial n)_0=0$, поэтому значения функции тока на границе вспомогательной области Ω_1 подправляются с помощью разностного аналога этого условия. Используя условие $\psi_0=0$ и трехточечную аппроксимацию второго порядка точности для производной $(\partial\psi/\partial n)_0$, получим, например, при $x=0$:

$$\psi_{i,j}^{s+1} = 1/4 \bar{\psi}_{2j}^{s+1}. \quad (3,2)$$

При использовании четырехточечной аппроксимации третьего порядка точности будем иметь

$$\psi_{i,j}^{s+1} = 1/2 \bar{\psi}_{2j}^{s+1} - 1/9 \bar{\psi}_{3j}^{s+1}. \quad (3,3)$$

Далее, из уравнения (1,3) определяется поле температур $\theta^{s+1}(x, y)$, и затем весь цикл повторяется. В случае необходимости значение вихря непосредственно на границе Ω_0 может быть найдено, например, с помощью формул (2,1) — (2,3).

Несмотря на кажущееся сходство, этот метод отличается от известного метода Пирсона (11), который также ставил граничное условие для вихря внутри основной области. Отличие состоит в том, что условия на границе Ω_1 ставились Пирсоном и для вихря, и для функции тока, причем, последние определялись, исходя из разложения функции тока в ряд Тейлора вблизи границы, что приводило к соотношениям, подобным (2,3).

4. Решения стационарных задач, полученные с помощью этого метода и метода (2,6) при использовании одних и тех же формул для производной $(\partial\psi/\partial n)_0$ и одних и тех же условий стационарирования, практически не различаются. Например, для задачи о конвекции в замкнутой квадратной области, подогреваемой сбоку, при $Ra=4 \cdot 10^6$, $Pr=1$, $H/L=1$ средние потоки тепла (или числа Нуссельта), вычисленные с помощью этих двух методов на сетке 25×25 , составляют соответственно 3,537 и 3,536; различия в значениях местного потока тепла не превышают 0,2%. (Для аппроксимации производной $(\partial\psi/\partial n)_0$ в обоих случаях использовалась формула третьего порядка точности.) Среднее число Нуссельта, полученное с помощью граничного условия (2,3), составляет 3,679, что на 3% выше. Максимальное различие в местных потоках тепла для разных методов достигает при этом 13%. Эти различия объясняются разными знаками в остаточных членах разностной аппроксимации $(\partial\psi/\partial n)_0$ в соответствии с формулами (3,3) и (2,3).

На рис. 1 приведены значения среднего числа Нуссельта, вычисленные по данному методу и методу (2,3) на различных сетках. Можно видеть, что с помощью метода (2,3) осуществляется приближение к точному решению сверху, а с помощью данного метода и метода (2,6) — приближение снизу. При этом различия в \bar{Nu} при данном числе Рэлея на грубых сетках (21×21 , 11×11) могут быть весьма существенными, достигая 15—30%.

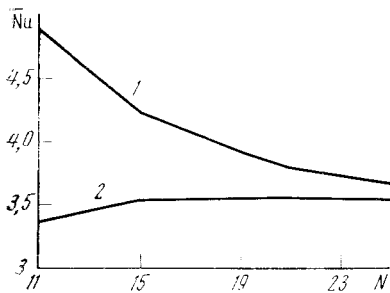


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость среднего потока тепла на стационарном режиме от числа узлов сетки вдоль координатной оси. $Ra=4 \cdot 10^4$, $Pr=1$. 1 — граничные условия (2, 3), 2 — предлагаемый метод

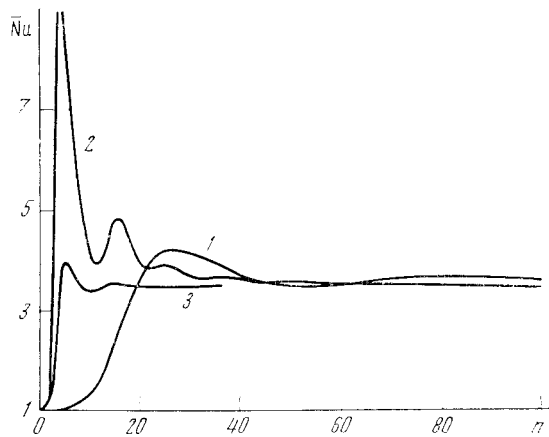


Рис. 2

Рис. 2. Изменение среднего потока тепла по числу итераций n для различных методов расчета граничных условий. $Ra=4 \cdot 10^4$, $Pr=1$, $\sigma=0,25$, сетка 25×25 . 1 — граничные условия (2, 3), $\tau=0,001$, 2 — итерационный метод (2, 6), $\tau=0,005$; $\sigma_0=1,0$, 3 — предлагаемый метод, $\tau=0,005$

Очевидно, что аналогичная ситуация будет иметь место на более подробных сетках при больших числах Рэлея.

Важным преимуществом данного метода по сравнению с методами (2,1) — (2,3) и (2,6) является вычислительная устойчивость, позволяющая в сочетании с неявной схемой расчета уравнений (1,1) — (1,3) существенно увеличить временной шаг при решении нестационарных задач и уменьшить число итераций при решении стационарных задач. В качестве примера на рис. 2 сопоставлены результаты расчета установления среднего потока тепла по числу итераций для трех рассмотренных методов расчета граничных условий. Для решения уравнений (1,1) — (1,3) во всех трех случаях использовалась неявная разностная схема типа переменных направлений (см. (5-6)). Параметры внешнего итерационного цикла τ для каждого из сравниваемых методов взяты близкими к предельным по устойчивости при значении параметра внутреннего итерационного цикла $\sigma=0,25$. Значение граничного итерационного параметра σ_0 для метода (2,6) взято в соответствии с результатами численного эксперимента близким к оптимальному. На рис. 2 видно, что по сравнению с методами (2,3) и (2,6) число итераций, а следовательно, и время счета стационарной задачи при одной и той же требуемой точности стационарирования с использованием предложенного метода может быть уменьшено по крайней мере в 4-5 раз.

В заключение авторы благодарят Л. А. Чудова за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Поступило
28 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Thom, Aeronaut. Res. Couns. Rep. and Memor., № 1194 (1928). ² А. Том. К. Эйлер, Числовые расчеты полей в технике и физике, М., 1964. ³ J. Woods, Aero Quart., № 5 (1954). ⁴ Т. В. Кускова, Л. А. Чудов, Вычислительные методы и программирование, в. 11, 27 (1968). ⁵ Т. В. Кускова, Сборн. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 3, 1971. ⁶ В. И. Полежаев, Ю. В. Вальциферов, Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 3, 1971. ⁷ А. А. Дородницын, Н. А. Меллер, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 8, № 2 (1968). ⁸ M. Israeli, Stud. Appl. Math., v. 49, № 4, 327 (1970). ⁹ Э. Н. Сармин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 13, № 5 (1973). ¹⁰ К. И. Бабенко, Н. Д. Введенская, там же, т. 12, № 5 (1972). ¹¹ C. Pearson, J. Fluid Mech., v. 21, Part 4, 611 (1965).