Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.947.44 *МАТЕМАТИКА*

Р. М. ГАРИПОВ

НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 V 1974)

В статье (1) доказана единственность решения следующей граничной задачи для волнового уравнения: в области $R_{++}^4=\{(t, x)\,|\,t>0,\ x_3>0\}$ требуется определить функцию $u(t, x)$, если выполнены условия:

1) $u\in C^2(\overline{R_{++}^4})$ и $\Box u\equiv u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-x_{x_3x_3}=0$ в R_{++}^4;

2) $u_{x_3}(t, x', 0)=0$ при $x'=(x_1, x_2)\in R^2$, $t>0$;

3) $u(t, x', 0)=f(t, x')$ на S: $t>0$, $|x'|<r$, $x_3=0$, где r — заданное число, $f(t, x')$ — заданная функция S;

4) носители функций $\varphi_0(x)=u(0, x)$, $\varphi_1(x)=u_t(0, x)$ находятся в области $\overline{\Omega}=\{x\,|\,|x_3|\geqslant\delta,\ |x|=(\sum_{i=1}^{3} x_i^2)^{1/2}\leqslant a\}$, где $0<\delta<a<\infty$ — заданные постоянные.

Далее заменим условие 2) эквивалентным ему условием четности по x_3. Тогда решение u выражается через φ_0, φ_1 по формуле Кирхгофа и непрерывно зависит от φ_0, φ_1 в C'-норме. Поэтому нам достаточно определить функции φ_0, φ_1. Формула Кирхгофа дает для их определения следующее интегральное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-y|=t}\varphi_0(y)\,dS_y+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-y|=t}\varphi_1(y)\,dS_y=f(t, x'),\tag{1}$$

$$t>0,\quad |x'|<r,\quad x_3=0.$$

В этой статье мы сведем задачу 1)—4) к частному случаю $r=\infty$, $\varphi_1\equiv0$ и к аналитическому продолжению функции одной переменной, откуда будет вытекать, в частности, еще раз единственность решения. В указанном частном случае решение получается в явном виде и непрерывно зависит от f в C^m-норме (1, 2). Таким образом, «некорректная» часть задачи содержится в этом аналитическом продолжении. Ниже мы получим указанное решение при $r=\infty$, $\varphi_1\equiv0$ другим способом, используя представление $u(0, x)$ через данные задачи и значение решения при больших $|x|$. Случай $\varphi_0\equiv0$ сводится к случаю $\varphi_1\equiv0$ дифференцированием по t интегрального уравнения (1). Покажем далее, что при $r<\infty$ решение не может зависеть от f непрерывно по Гёльдеру в классе функций с конечной гладкостью.

Предложение 1. *При* $r=\infty$, $\varphi_1\equiv0$ *решение интегрального уравнения* (1) *дается формулой*

$$\varphi_0(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{f(|x-y|, y')}{|x-y|}\,dy',\quad x_3>0.\tag{2}$$

Доказательство. Пусть $u(t, x)$ — искомое решение волнового уравнения. Возьмем точку $a=(a_1, a_2, a_3)$, $a_3>0$. Проинтегрируем по области пространства $x_3>0$, $T>|x-a|>\tau>0$ следующее тождество по $x\neq a$:

$$0=|x-a|^{-1}(\Box u)\big|_{t=|x-a|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(u_t\frac{\partial}{\partial x_i}\ln|x-a|-u_{x_i}|x-a|^{-1}+u\frac{\partial}{\partial x_i}|x-a|^{-1}\right)\Big|_{t=|x-a|}\right). \quad (3)$$

Полагая $\tau\to 0$, $T\to\infty$, получим

$$0=-\int\limits_{x_3=0}\left(u_t\frac{\partial}{\partial x_3}\ln|x-a|+u\frac{\partial}{\partial x_3}|x-a|^{-1}\right)\Big|_{t=|x-a|}dx'+4\pi u(0,a)+$$

$$+\lim_{T\to\infty}\int\limits_{x_3>0,\ |x-a|=T}\left(T^{-1}\left(u_t-\frac{\partial u}{\partial n}\right)-T^{-2}u\right)\Big|_{t=|x-a|}dS. \quad (4)$$

Вычислим предел в равенстве (4) при дополнительном продолжении $\varphi_1=0$. Возьмем сферическую систему координат (r,e), $|e|=1$, с центром в точке a. Вычислим интеграл (1) с точностью $O(t^{-1})$, так как члены меньшего порядка дадут нуль в пределе (4):

$$u(t,x)\simeq\frac{1}{4\pi t}J_p(e,r-t+a\cdot e), \quad (5)$$

где $J(e,p)$ — интеграл $\varphi_0(\varphi)$ по плоскости $e\cdot y=p$ (преобразование Радона). На сфере $|x-a|=T$ $\partial u/\partial n=\partial u/\partial r$, равенство (5) дает

$$u_t-\frac{\partial u}{\partial n}\simeq\frac{1}{2\pi t}J_{pp}(e,r-t+a\cdot e). \quad (6)$$

При $T\to\infty$ вектор e описывает полусферу. Учитывая, что $J(e,p)=J(-e,-p)$ и используя формулу Радона, получим, что предел в (4) равен $-2\pi u(0,a)$. Отсюда следует (2), ч.т.д.

Сведение к аналитическому продолжению. Обозначим первый и второй интеграл в левой части уравнения (1) f_0, f_1 соответственно. Как и в статье [1], применим к f_k преобразование типа Фурье по t

$$F_k(\alpha,x')=\int\limits_0^\infty e^{i\alpha t^2}f_k(t,x')\,dt, \quad k=0,1. \quad (7)$$

Отсюда

$$\frac{f_k(t,x')}{2t}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos(\alpha t^2)\operatorname{Re}F_k(\alpha,x')\,d\alpha. \quad (8)$$

Формулами (8) и (2) искомое решение φ_0, φ_1 определяется через F_0, F_1 непрерывно по C^m-норме. Поэтому некорректная часть задачи состоит в определении $F_k(\alpha,x')$ при всех (вещественных) $\alpha\geqslant 0$, x'.

Положим $x'=p\xi$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ — вещественный единичный вектор. Преобразуем выражения

$$F_0(\alpha,p\xi)=-\frac{i\alpha}{2\pi}e^{i\alpha p^2}\int\limits_{R^3}e^{i\alpha(-2p\xi y'+|y|^2)}\varphi_0(y)\,dy, \quad (9)$$

$$F_1(\alpha,p\xi)=\frac{1}{4\pi}e^{i\alpha p^2}\int\limits_{R^3}e^{i\alpha(-2p\xi y'+|y|^2)}\frac{\varphi_1(y)\,dy}{\sqrt{p^2-2p\xi y'+|y|^2}} \quad (10)$$

Так как функции φ_0, φ_1 финитны, то из (9) следует, что $F_0(\alpha,p\xi)$ есть целая аналитическая функция p. А функция F_1 имеет точки ветвления

$$p=\xi y'\pm i\sqrt{-(\xi y')^2+|y|^2}, \qquad y=(y', y_3)\in\Omega. \tag{11}$$

Множество этих точек ветвления заполняет два сегмента $|p|\leqslant\alpha$, $|\operatorname{Im} p|\geqslant\geqslant\delta$, которые на рис. 1 заштрихованы. Вне этих сегментов F_1 — двузначная аналитическая функция p при обходе одного сегмента меняет знак. Следовательно, сумма $F=F_0+F_1$ аналитична вне этих сегментов и по условию 3) задана на интервале $(-r, r)$ вещественной оси. Поэтому F можно аналитически продолжить (и притом единственным образом). Продолжение

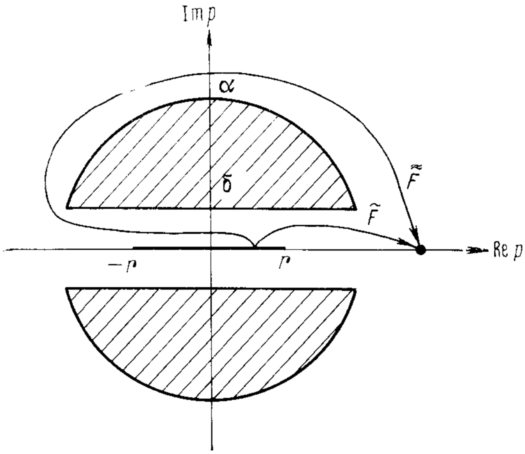

Рис. 1

по двум путям рис. 1 даст два различных значения $\tilde{F}$, $\tilde{\tilde{F}}$. В силу сказанного выше о F_1, имеем

$$F_0={}^1/_2(\tilde{F}+\tilde{\tilde{F}}), \qquad F_1={}^1/_2(\tilde{F}-\tilde{\tilde{F}}). \tag{12}$$

Тем самым определим обе функции F_0, F_1, что и требовалось.

Казалось бы, что решение зависит от f гёльдерово. Но это не так.

Предложение 2. *При $r<\infty$ (даже если $\varphi_0\equiv 0$) решение интегрального уравнения* (1) *не зависит от f непрерывно по Гёльдеру в классе функций конечной гладкости.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0\equiv 0$. Определим компактное множество M искомых функций φ_1 условием 4) и неравенством $\|\varphi\|_{C^m}\leqslant 1$. Предположим противное: пусть существуют конечные числа m_1, const, $0<\beta\leqslant 1$ такие, что

$$\|\varphi_1\|_C\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|^{\beta}_{C^{m_1}(S)}, \qquad \varphi_1\in M. \tag{13}$$

Покажем, что это невозможно. Соображения геометрической оптики подсказывают следующий противоречащий пример:

$$\varphi_1(x)=ck^{-m}e^{ikx_1}\psi(x), \qquad k\geqslant 1, \qquad \psi\in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{14}$$

$\psi=1$ в некоторой окрестности в Ω. Тогда существует не зависящее от k конечное число $c_1>0$ такое, что

$$\|\varphi_1\|_C\geqslant ck^{-m}, \qquad \|\varphi_1\|_{C^m}\leqslant cc_1. \tag{15}$$

Выбирая $c=c_1^{-1}$, достигаем $\varphi_1\in M$. С другой стороны,

$$f(t,x')=\frac{ck^{-m}}{4\pi}\int_{R^2} e^{iky_1}\psi(y', \sqrt{t^2-|x'-y'|^2})\frac{dy'}{\sqrt{t^2-|x'-y'|^2}}. \tag{16}$$

Так как по условию 3) $\psi=0$ в окрестности $z=\sqrt{t^2-|x'-y'|^2}=0$, подынтегральная функция $\in C_0^\infty(R^2)$, поэтому интеграл (16) можем проинтегрировать по частям N раз по переменной y_1, при этом появятся члены, пропорциональные x_1^k, $k\leqslant N$. Так как $|x_1|\leqslant|x'|<r<\infty$, то

$$\|f\|_{C^{m_1}(S)}\leqslant C_{N,\,m_1}k^{m_1-m-N}. \tag{17}$$

Подставим выражения (15), (17) в (14). Выбирая N несколько большим, чтобы $m+\beta(m_1-m-N)<0$, и полагая $k\to\infty$, приходим к противоречию, ч.т.д.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. М. Гарипов, В. Б. Кардаков*, ДАН, т. 213, № 5, 1047 (1973). [2] *А. Л. Бухгейм*, Тр. ВЦ СО АН СССР, в. 4, 69 (1973).