Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 517.537

*МАТЕМАТИКА*

А. А. РЯБИНИН

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 II 1973)*

Пусть $B^r_{1,\mathrm{loc}}$, $0<r<1$,– топологическое векторное пространство над полем комплексных чисел, элементами которого являются измеримые функции, определенные на действительной оси и принадлежащие классу Бесова $B^r_{1,1}$, $0<r<1$ [4], на каждом конечном интервале; топология в $B^r_{1,\mathrm{loc}}$ определяется семейством полунорм $\{p_{a,b}(f)=\|f\|_{B_{1,1}{}^r[a,b]},\ -\infty<a<b<\infty\}$.

В данной заметке продолжается изучение периодических в среднем функций из пространств $B^r_{1,\mathrm{loc}}$($B_1{}^r$-п.в.с. функций), начатое в [3]. $B_1{}^r$-п.в.с. функции определяются как решения однородного уравнения свертки

$$s*f\equiv\int_{-q}^{q}f(x+t)\,dg(t)=0,\quad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

где $s\in(B^r_{1,\mathrm{loc}})^*$, $f\in B^i_{1,\mathrm{loc}}$, $g\in\Lambda_{1-r}[-q,q]$ — классу Гёльдера с показателем $1-r$, а интеграл понимается в смысле работы [5].

Положим

$$L(\mu)=\int_{-q}^{q}e^{i\mu t}\,dg(t),\qquad \omega_L(\mu,\alpha,f)=ie^{-i\alpha\mu}\int_{-q}^{q}\left[\int_{0}^{t}f(\alpha+t-u)\,e^{i\mu u}\,du\right]dg(t).$$

1. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots$— различные нули $L(\mu)$, а $m_1,m_2,\ldots,m_k,\ldots$— соответственно их кратности. Решению $f(x)$ уравнения (1) приведем в соответствие ряд

$$f(x)\sim\sum_{\lambda_k}P_k(x)\,e^{i\lambda_k x},\qquad P_k(x)\,e^{i\lambda_k x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{\omega_L(\mu,\alpha,f)}{L(\mu)}\,e^{i\mu x}\,d\mu; \tag{2}$$

здесь $C_k$ — окружность с центром в точке $\lambda_k$, внутри которой нет нулей $L(\mu)$, отличных от $\lambda_k$, $P_k(x)$ — многочлен, степень которого меньше $m_k$, он не зависит [1, 3] от параметра $\alpha$, $-\infty<\alpha<\infty$.

Для непрерывных п.в.с. на всей оси функций в предположении, что $L(\mu)=\overline{L(\bar\mu)}$, Л. Шварц указал метод суммирования (метод Абеля) вообще расходящегося ряда (2) [2]. А. Ф. Леонтьев распространил в [1] этот метод суммирования на непрерывные п.в.с. на интервале функции, освободившись при этом от ограничений на $L(\mu)$. Оказывается, метод Абеля суммирования применим и для $B_1{}^r$-п.в.с. функций. Вспомогательным инструментом является лемма 2 и теорема 2 из [3].

Пусть $\beta>0$ — достаточно малое число такое, что на лучах $\arg\mu=\pm(\pi/2+\beta)$ выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty}r^{-1}\ln|L(re^{i\theta})|=q|\sin\theta|$$

(см. лемму 1 из [1]). Обозначим через $\Gamma_\beta^+$ бесконечный контур, образованный лучами $\arg\mu=\pm(\pi/2+\beta)$, свободный от нулей $L(\mu)$ и обходимый сверху вниз. Через $S'$ и $S''$ обозначим области, лежащие соответственно слева и справа от $\Gamma_\beta^+$. Рассмотрим функции

$$L^+(\lambda,z)=L(\lambda)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\beta^+}\frac{e^{i\mu z}}{(\lambda-\mu)L(\mu)}\,d\mu; \tag{3}$$

$$\varphi^+(t,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}L^+(\lambda,z)\,e^{-i\lambda t}\,d\lambda \tag{4}$$

и оператор

$$N_\beta^+(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\varphi^+(t-\alpha,z-\alpha)\,f(t)\,dt. \tag{5}$$

В (3) считаем $\lambda\in S'$.

Обозначим через $D_\beta$ угол раствора $2\beta$ с вершиной в точке $iq\operatorname{ctg}\beta$ и сторонами, проходящими через точки $\pm q$; через $D_\beta^+$ ($D_\beta^-$) — часть $D_\beta$ с $y>0$ ($y<0$). Для $z\in D_\beta$ функция $L^+(\lambda,z)$ является целой функцией первого порядка и типа не выше $q$. С учетом теоремы 2 из [3] можно считать, что на действительной оси $L(\lambda)=O(\lambda^{-2})$. Тогда для $z\in D_\beta^+$ этим же свойством обладает и $L^+(\lambda,z)$, поэтому для $z\in D_\beta^+$ функция (4) непрерывна на $[-q,q]$ и равна нулю вне его. Таким образом, оператор (5) определен для любой функции $f\in L_1[-q+\alpha,q+\alpha]$, если $(z-\alpha)\in D_\beta^+$. Для контура $\Gamma_\beta^-$, отличающегося от $\Gamma_\beta^+$ лишь направлением обхода, аналогично вводится функция $L^-(\lambda,z)$, которая для $z\in D_\beta^-$ является целой функцией первого порядка, типа не выше $q$ и на действительной оси $L^-(\lambda,z)=O(\lambda^{-2})$. По функции $L^-(\lambda,z)$ определяем функцию $\varphi^-(t,z)$ и оператор $N_\beta^-(f,z)$.

Пусть $A$ и $\delta$ — фиксированные положительные числа. Обозначим через $D_1$ прямоугольник $0<y<A$, $|x-\alpha|<q-\delta$, а через $D_2$ — полуполосу $y<0$, $|x-\alpha|<q$. Подчиним ранее введенное число $\beta$ условию

$$\sin\beta<(\sqrt{2}-1)\,\delta/(2A).$$

Тогда $D_1\subset D_\beta^+$, $D_2\subset D_\beta^-$. Согласно [1]

$$N_\beta^+(f,z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<\rho_n,\lambda_k\in S''}P_k(z)\,e^{i\lambda_k z},\qquad z\in D_1; \tag{6}$$

$$N_\beta^-(f,z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<\rho_n,\lambda_k\in S'}P_k(z)\,e^{i\lambda_k z},\qquad z\in D_2, \tag{7}$$

последовательность $\rho_n\uparrow\infty$ определяется леммой 3 из [1]. Это утверждение является первой частью рассматриваемого метода суммирования ряда (2). Далее, при действительных $\lambda$ положим $L^+(\lambda,z)=L_1^+(\lambda,z)+L_2^+(\lambda,z)$, где $L_2^+(\lambda,z)=0$ при $\lambda<0$ и $L_2^+(\lambda,z)=e^{i\lambda z}$ при $\lambda\geqslant0$, а

$$L_1^+(\lambda,z)=L(\lambda)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\beta^+}\frac{e^{i\mu z}}{(\lambda-\mu)L(\mu)}\,d\mu.$$

Тогда

$$\varphi^+(t,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}L_1^+(\lambda,z)\,e^{-i\lambda t}\,d\lambda+\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\lambda z}e^{-i\lambda t}\,d\lambda=\varphi_1^+(t,z)+\frac{1}{i(t-z)}. \tag{8}$$

Функция $\varphi_1^+(t,z)$ непрерывна для $z$ из прямоугольника $E$: $|y|<A$, $|x|<q-\delta$ и $t$, лежащих на действительной оси.

Имея в виду (8), находим

$$N_\beta^+(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\varphi_1^+(t-\alpha,z-\alpha)f(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

$$(z-\alpha)\in E,\quad y>0. \tag{9}$$

Аналогично

$$N_\beta^-(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\varphi_1^-(t-\alpha,z-\alpha)f(t)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

$$(z-\alpha)\in E,\quad y<0, \tag{10}$$

причем $\varphi_1^-(t,z)=-\varphi_1^+(t,z)$ для $z\in E$.

Пусть $z=x+iy$, $y>0$, $(z-\alpha)\in E$. Записав формулу (9) в точке $z$, а (10) — в $\bar z$ и сложив их, получим

$$N_\beta^+(f,z)+N_\beta^-(f,\bar z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}[\varphi_1^+(t-\alpha,z-\alpha)-\varphi_1^+(t-\alpha,\bar z-\alpha)]f(t)\,dt+$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt.$$

Теорема 1. *Пусть* $f\in B_{1,1}^r[a,b]$, $[a,b]\supset[-q+\alpha,q+\alpha]\supset[a_1,b_1]$. *Тогда в смысле* $B_{1,1}^r$

$$\overset{B_{1,1}^r}{\lim_{y\to+0}}\frac{1}{2\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}[\varphi_1^+(t-\alpha,z-\alpha)-\varphi_1^+(t-\alpha,\bar z-\alpha)]f(t)\,dt=0,\quad a_1\leqslant x\leqslant b_1;$$

$$\overset{B_{1,1}^r}{\lim_{y\to+0}}\frac{y}{\pi}\int_{-q+\alpha}^{q+\alpha}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt=f(x),\quad a_1\leqslant x\leqslant b_1.$$

Эта теорема позволяет распространить указанный метод суммирования Абеля на $B_1^r$-п.в.с. функции.

Теорема 2. *Пусть* $f\in B_1^r$ *и удовлетворяет уравнению* (1). *Тогда*

$$\overset{B_1^r}{\lim_{y\to 0}}\{N_\beta^+(f,z)+N_\beta^-(f,\bar z)\}=f(x),\quad z=x+iy,\quad y>0.$$

Замечание. Из теоремы 2 как следствие получаем факт аппроксимации любого решения уравнения (1) посредством элементарных решений, установленный в ([3]). Теорема 2 допускает обобщение на $B_1^r$-п.в.с. на интервале функции.

2. Функции $N_\beta^+(f,z)$ и $N_\beta^-(f,z)$, соответствующие решению $f$ уравнения (1), регулярны, как видно из (9), (10), соответственно в областях $0<y<A$ и $y<0$. В ([1]), теорема 14, установлено, что $N_\beta^+(f,z)$ регулярна в $y>0$. Рассмотрим поведение функций $N_\beta^+(f,z)$ и $N_\beta^-(f,z)$, если точка $z$ приближается к действительной оси соответственно сверху и снизу. Согласно равенствам (9), (10), все сводится к изучению поведения интеграла типа Коши с плотностью из пространства $B_{1,\mathrm{loc}}^r$ при стремлении точки $z$ к точкам промежутка интегрирования $[-q+\alpha,q+\alpha]$.

Теорема 3. *Пусть* $f\in B_{1,1}^r[a_1,b_1]$, $[a_1,b_1]\supset[a,b]\supset[a_2,b_2]$.

*Тогда интеграл в смысле главного значения* $\mathrm{V.p.}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(t)}{t-\tau}\,dt$, $\tau\in[a_2,\ b_2]$, *определяет функцию из* $B_{1,1}{}^r[a_2\ b_2]$. *При дополнительном условии*

$$\int_0 \frac{\omega_1(f;\,h)}{h^{1+r}}\ln\frac{1}{h}\,dh<\infty,\quad \omega_1(f;\,h)=\sup_{0<t\leqslant h}\int_a^{b-t}|f(x+t)-f(x)|\,dx, \quad (11)$$

$$\overset{B^r_{1,1}}{\lim_{y\to\pm 0}}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\pm\frac{1}{2}f(\tau)+\mathrm{V.\,p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(t)}{t-\tau}\,dt,\quad z=\tau+iy.$$

Эта теорема дает ответ на вопрос о предельных значениях $N_\beta{}^+(f,\ z)$ и $N_\beta{}^-(f,\ z)$.

Теорема 4. *Пусть* $f\in B^r_{1,\mathrm{loc}}$ *и на каждом конечном интервале действительной оси удовлетворяет условию* (11). *Если* $f(x)$ *является решением уравнения* (1), *то* $f(x)=N_\beta{}^+(f,\ x)+N_\beta{}^-(f,\ x)$, *причем функции* $N_\beta{}^+(f,\ z)$, $N_\beta{}^-(f,\ z)$ *регулярны соответственно в верхней и нижней полуплоскости и имеют при* $y\to 0$ *в топологии* $B_1{}^r$ *предельные значения* $N_\beta{}^+(f,\ x)$, $N_\beta{}^-(f,\ x)$ *из* $B_1{}^r$.

Автор приносит благодарность А. Ф. Леонтьеву за внимание к работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 II 1973

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Ф. Леонтьев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 2 (1965). [2] *L. Schwartz*, Ann. Math., v. 48, № 4 (1947). [3] *А. А. Рябинин*, ДАН, т. 211, № 5 (1973). [4] *С. М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [5] *В. И. Мацаев, М. З. Соломяк*, Матем. сборн., т. 88, № 4 (1972).