Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.512 *МАТЕМАТИКА*

А. А. ПРИВАЛОВ

О РАСХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

(Представлено академиком С. М. Никольским 12 II 1974)

Пусть $\mathfrak{M}=\{x_{k,n}\}$, $-1\leqslant x_{n,n}<x_{n-1,n}<\ldots<x_{2,n}<x_{1,n}\leqslant 1$, $n=1, 2, 3, \ldots$, — матрица узлов интерполирования, принадлежащая отрезку $[-1; 1]$. Для любой вещественной непрерывной на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(x)$, $f(x)\in C([-1; 1])$, положим

$$\mathscr{L}_n(\mathfrak{M}, f, x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\cdot l_{k,n}(\mathfrak{M}, x),$$

где

$$l_{k,n}(\mathfrak{M}, x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{k,n})\cdot(x-x_{k,n})},\quad \omega_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_{i,n}).$$

Один из основных вопросов теории интерполирования состоит в выяснении для данной матрицы $\mathfrak{M}$ метрических характеристик множеств $\mathscr{E}(f)\subset[-1; 1]$ точек расходимости интерполяционных процессов $\{\mathscr{L}_n(\mathfrak{M}, f, x)\}$ Лагранжа функции $f(x)\in C([-1; 1])$.

С. Н. Бернштейн [1] показал существование для любой матрицы $\mathfrak{M}$ узлов интерполирования точки $x_0\in[-1; 1]$ и функции $f(x)\in C([-1; 1])$ таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\mathscr{L}_n(\mathfrak{M}, f, x_0)|=\infty. \tag{1}$$

Принцип сгущения особенностей и теорема П. Эрдёша [12] позволяют для любой матрицы $\mathfrak{M}$ построить непрерывную функцию $f(x)$, интерполяционный процесс Лагранжа которой расходится на множестве $\mathscr{E}(f)$ мощности континуума.

Вопрос о метрической характеристике множеств $\mathscr{E}(f)$ решался в работах С. Н. Бернштейна [2], Г. Грюнвальда [6] и И. Марцинкевича [9], где показано, что в случае интерполяционного процесса Лагранжа, построенного по равноотстоящим узлам отрезка $[-1; 1]$ или узлам Чебышева, т. е. по корням многочленов $T_n(x)=\cos n\arccos x$, $n=1, 2, 3, \ldots$, существуют непрерывные функции, для которых эти процессы расходятся везде на $[-1; 1]$. С другой стороны, П. П. Коровкин [8] и С. Н. Мергелян [10] доказали существование совершенного множества F и матрицы $\mathfrak{M}$ узлов интерполирования таких, что интерполяционный процесс Лагранжа равномерно сходится к всякой функции $f(x)$, непрерывной на F. Поэтому для произвольной матрицы $\mathfrak{M}$ нельзя утверждать существование $f(x)\in C([-1; 1])$ такой, что интерполяционный процесс Лагранжа расходится везде на $[-1; 1]$.

Для достаточно широкого класса матриц $\mathfrak{M}$ доказывается существование непрерывных функций таких, что $\mathscr{E}(f)$ имеет положительную меру Лебега. Вопрос о том, обладает ли этим свойством произвольная матрица $\mathfrak{M}$, остается открытым.

Определение. Матрицу $\mathfrak{M}$, n-я строка которой состоит из корней многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, будем называть матрицей Якоби.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha>-1$, $\beta>-1$ *и* $\mathfrak{M}$ — *матрица Якоби.*

Тогда существует функция $f(x)\in C([-1;1])$ *такая, что равенство* (1) *справедливо почти везде на* $[-1;1]$.

При доказательстве теоремы 1 существенно используются: асимптотические формулы для многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. ([11])), распределение простых чисел в арифметической прогрессии и результаты И. М. Виноградова ([3–5]) о количестве простых чисел $p\leqslant x$, для которых дробные доли $\{\theta\cdot p\}$, где θ — иррациональное число, попадают на интервал $(0;\zeta)$.

Теорема 2. *Если матрица* $\tilde{\mathfrak{M}}=\{y_{k,n}\}$ *узлов интерполирования получена из матрицы Якоби* $\mathfrak{M}=\{x_{k,n}\}$ *преобразованиями:*

1) $x_{1,n}-y_{1,n}=O(\delta_n)$, $x_{n,n}-y_{n,n}=O(\delta_n)$;

2) $y_{k+1,n}-y_{k,n}=x_{k+1,n}-x_{k,n}+\alpha_k\delta_n$, $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$, *где* $\alpha_k=\alpha_k(n)$ *удовлетворяют условиям*

$$\left|\sum_{k=i}^{j}\alpha_k\right|\leqslant c,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n-1;$$

3) $0\leqslant\delta_n\leqslant n^{-3-\gamma}$, $\gamma=\min(\alpha,\beta)>-1$,

то справедливо утверждение теоремы 1.

Теорема 3. *Если матрица* $\mathfrak{M}$ *узлов интерполирования такова, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\omega_n'(x_{k,n})|^{-1/n}\}>2, \tag{2}$$

то существуют функция $f(x)\in C([-1;1])$ *и множество* $\mathscr{E}\subset[-1;1]$, $\operatorname{mes}\mathscr{E}>0$, *такие, что интерполяционный процесс Лагранжа расходится на* $\mathscr{E}$.

Известно, что для матрицы $\mathfrak{M}$ по равноотстоящим узлам отрезка $[-1;1]$ условие (2) выполняется (см. ([7])).

Поступило
29 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Бернштейн*, Собр. соч., т. 2, 1954, стр. 107. [2] *С. Н. Бернштейн*, Собр. соч., т. 1, 1952, стр. 253. [3] *И. М. Виноградов*, Матем. сборн., т. 2. № 2, 179 (1937). [4] *И. М. Виноградов*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 23 (1947). [5] *И. М. Виноградов*, Изв. АН СССР, сер. матем., № 12, 225 (1948). [6] *G. Grünwald*, Ann. Math., (2), v. 37, 908 (1936). [7] *П. П. Коровкин*, Докторская диссертация, 1947. [8] *П. П. Коровкин*, ДАН, т. 78, № 5, 853 (1951). [9] *J. Marcinkiewiez*, Acta Litterarum as Sci., Szeged., v. 8, 131 (1937). [10] *С. Н. Мергелян*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 37 (1951). [11] *Г. Сегё*, Ортогональные многочлены, М., 1962. [12] *P. Erdös*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v. 9, № 3–4, 381 (1958).