Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 513.836 **МАТЕМАТИКА**

В. А. СМИРНОВ

СКРЕЩЕННЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ТЕОРИЯ ХИРША

(Представлено академиком П. С. Новиковым 5 V 1974)

В данной работе мы будем пользоваться теорией скрещенных тензорных произведений Э. Брауна (см. ([2])).

Пусть K — DGA-коалгебра, A — DGA-алгебра и L — DGA-модуль над алгеброй A. Пусть далее $\varphi \in \mathrm{Hom}_1(K; A)$ — произвольная скрещивающая коцепь.

Рассмотрим DGA-алгебру $L^* = \mathrm{Hom}(H_*(L); H_*(L))$, где $H_*(L)$ рассматривается как DGA-модуль с нулевым дифференциалом, а умножение в L^* определяется операцией компонирования гомоморфизмов. Тогда имеет место следующая теорема, полученная Брауном.

Теорема 1. *Если Λ — кольцо главных идеалов, а коалгебра K и модули L и $H_*(L)$ свободны над Λ, то существует скрещивающая коцепь $\varphi^* \in \in \mathrm{Hom}^{-1}(K; L^*)$, для которой имеет место цепная эквивалентность ψ: $K\otimes_\varphi L \to K\otimes_{\varphi^*} H_*(L)$.*

В качестве следствий из этой теоремы и теории скрещенных тензорных произведений Браун получает

Следствие 1. *Если для слабо транзитивного расслоения (X, B, p, λ) база B линейно связана, а модуль $H_*(F; \Lambda)$, где Λ — кольцо главных идеалов, свободен над Λ, то существует скрещивающая коцепь φ^*: $S(B)\otimes\Lambda \to \to (S(F)\otimes\Lambda)^*$ такая, что комплексы $S(B)\otimes\Lambda\otimes_{\varphi^*} H_*(F; \Lambda)$ и $S(X)\otimes\Lambda$ цепно эквивалентны.*

Следствие 2. *В условиях следствия 1 на модуле $C^*(B; H^*(F; \Lambda))$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный комплексу $C^*(X; \Lambda)$.*

Это утверждение является одним из основных результатов теории Г. Хирша (см. ([3, 4])).

В недавней докторской диссертации ([1]) Н. А. Берикашвили показал (теорема 4), что для расслоений (E, p, B, F) в смысле Серра на модуле $C_*(B; \Lambda)\otimes R_*(C^*(B; R^*))$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, модули гомологий (когомологий) которого изоморфны модулю гомологий (когомологий) модуля $C_*(E; \Lambda)$ $(C^*(E; \Lambda))$, где R_* и R^* обозначают свободную резольвенту модулей $H_*(F; \Lambda)$ и $H^*(F; \Lambda)$ соответственно.

В настоящей работе мы дадим обобщение теоремы 1 и следствий 1, 2 на случай, когда $H_*(L)$ не свободен.

Тем самым в случае, когда Λ — кольцо главных идеалов, будет получена теорема 4 Берикашвили.

Пусть Λ — кольцо главных идеалов и L — свободный DGA-модуль над Λ. Рассмотрим свободную резольвенту DGA-модуля $H_*(L)$, т. е. пару (R_*, f), где R_* — DGA-модуль над Λ и f: $R_* \to H_*(L)$ — DGA-отображение, причем выполнены следующие условия:

1) $R_* = \sum\limits_n R_n$, R_n свободен;

2) f сюръективно.

3) f_*: $H_*(R_*) \to H_*(L)$ — изоморфизм.

Так как L — свободный DGA-модуль над кольцом главных идеалов Λ, то естественное отображение $Z_*(L) \to H_*(L)$ может быть продолжено до

DGA-отображения g; $L\to H_*(L)$ и, следовательно, до DGA-отображения η: $L\to R_*$ такого, что $f\eta=g$.

Легко видеть, что η индуцирует изоморфизм η_*: $H_*(L)\to H_*(R_*)$, а так как L и R_* свободен, то существует DGA-отображение ξ: $R_*\to L$ и гомоморфизмы D': $L\to L$, D'': $R_*\to R_*$, D: $L\to R_*$ такие, что

$$\partial D'+D'\partial=\xi\eta-\mathrm{id},$$
$$\partial D''+D''\partial=\eta\xi-\mathrm{id},$$
$$\partial D-D\partial=\eta D'-D''\eta$$

(см. ([5]), стр. 134).

Рассмотрим DGA-алгебру $L^*=\mathrm{Hom}(R_*;\ R_*)$, умножение в которой определяется операцией компонирования гомоморфизмов, тогда R_* является DGA-модулем над алгеброй L^*. Пусть K — DGA-коалгебра, A — DGA-алгебра и $\varphi\in\mathrm{Hom}_{-1}(K;\ A)$ — их скрещивающая коцепь; тогда справедлива следующая

Теорема 1′. *Если Λ — кольцо главных идеалов, а коалгебра K и модуль L свободны над Λ, то существует скрещивающая коцепь $\varphi^*\in\mathrm{Hom}_{-1}(K;\ L^*)$, для которой имеет место цепная эквивалентность*

$$\varphi:\ K\otimes_\varphi L\to K\otimes_{\varphi^*}R_*.$$

Доказательство. Пусть w: $K\otimes_\varphi L\to R_*$ — произвольный сохраняющий размерности гомоморфизм; определим ψ: $K\otimes_\varphi L\to K\otimes R_*$, положив $\psi=(\mathrm{id}_1\otimes w)(\nabla\otimes\mathrm{id}_2)$, где id_1: $K\to K$, id_2: $L\to L$ — тождественные отображения, а ∇: $K\to K\otimes K$ — коумножение в коалгебре K.

Пусть A^q и A'^q — фильтрации произведений $K\otimes_\varphi L$ и $K\otimes R_*$ соответственно, $A^q=\sum\limits_{i\leqslant q}K_i\otimes L$, $A'^q=\sum\limits_{i\leqslant q}K_i\otimes R_*$ и φ^*: $K\to L^*$ такой гомоморфизм, что $\varphi^*(K_q)\subset L^*_{q-1}$. Тогда непосредственные вычисления показывают, что справедлива следующая

Лемма 1. *Равенство $\psi\partial_\varphi=\partial_{\varphi^*}\psi$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

1) *$w\partial_\varphi=\partial w+\nu(\nabla\otimes\mathrm{id})$, где ν: $K\otimes K\otimes L\to R_*$ определено формулой $\nu(k\otimes k'\otimes l)=(-1)^q\varphi^*(k)w(k'\otimes l)$, где $k\in K_q$, $k'\in K$, $l\in L$.*

Определим теперь отображения $w|A^p$ и φ_p^* индукцией по p так, чтобы выполнялись соотношения:

2) $\psi\partial_\varphi=\partial_{\varphi^*}\psi$,

3) φ^* — скрещивающая коцепь, т. е. $\varphi_0^*=0$, $a\varphi_1^*=0$, $\varphi_q^*(K_q)\subset L^*_{q-1}$ и $\partial\varphi_q^*=\varphi^*_{q-1}\partial-\Sigma(-1)^i\varphi_i^*\cup\varphi^*_{q-i}$, где a: $L^*\to\Lambda$ — аргументация.

Обозначим правую часть последнего равенства через γ_q^*. Положим для $k\otimes l\in A^0$ $w(k\otimes l)=a(k)\cdot\eta(l)$ и $\varphi_0^*=0$. Предположим, что отображения $w|A^p$ и φ_q^*, $q\leqslant p$, определены и имеют место соотношения 2) и 3). Соотношение 2) по лемме 1 эквивалентно соотношению 1). Рассмотрим это соотношение для $p+1$. Его можно переписать в следующем виде:

4) $\nu(k\otimes1\otimes l)+(-1)^pw(k\otimes\partial l)+\partial w(k\otimes l)=w(\partial k\otimes l+(-1)^{p+1}k\otimes l\cap\varphi)-\nu(\nabla'\otimes\mathrm{id})(k\otimes l)$, где $k\in K_{p+1}$, $l\in L$, $\nabla'(k)=\nabla(k)-k\otimes1$. Заметим, что $\nu(k\otimes1\otimes l)=(-1)^{p+1}\varphi^*(k)(\eta(l))$.

Пусть $U(k\otimes l)$ — правая часть равенства 4); мы определим $\varphi^*(k)$ и $w(k\otimes l)$ так, чтобы это равенство было выполнено. Прямые вычисления показывают, что справедлива следующая

Лемма 2. $\partial U(k\otimes l)=(-1)^{p+1}(\gamma^*(k)(\eta(l))-U(k\otimes\partial l))$.

Положим

$$\varphi^*(k)(x)=(-1)^{p+1}(U(k\otimes\xi(x))-\gamma^*(k)(D''(x))),$$
$$w(k\otimes l)=(-1)^{p+1}(U(k\otimes D'(l))-\gamma^*(k)(D(l))).$$

Тогда имеем

$$(\partial\varphi^*(k))(x)=\partial\varphi^*(k)(x)+(-1)^{p+1}\varphi^*(k)(\partial x)=$$
$$=-U(k\otimes\partial\xi(x))+\gamma^*(k)(\eta\xi(x))-\gamma^*(k)(\partial D''(x))+$$
$$+U(k\otimes\xi\partial(x))-\gamma^*(k)(D''\partial(x))=\gamma^*(k)(x),$$

т. е. φ^* удовлетворяет условиям 3).

Далее,

$$\nu(k\otimes 1\otimes l)+(-1)^p w(k\otimes\partial l)+\partial w(k\otimes l)=$$
$$=(-1)^{p+1}\varphi^*(k)(\eta(l))-U(k\otimes D'(\partial l))+\gamma^*(k)(D(\partial l))+$$
$$+(-1)^{p+1}\partial U(k\otimes D'(l))-(-1)^{p+1}\partial\gamma^*(k)(D(l))=$$
$$=U(k\otimes\xi\eta(l))-\gamma^*(k)(D''\eta(l))-U(k\otimes D'(\partial l))+$$
$$+\gamma^*(k)(D(\partial l))-U(k\otimes\partial D'(l))+\gamma^*(k)(\eta D'(l))-$$
$$-\gamma^*(k)(\partial D(l))=U(k\otimes l),$$

т. е. выполнено соотношение 4) и, следовательно, соотношение 2). Далее ясно, что $\psi(k\otimes l)=k\otimes w(1\otimes l)=k\otimes\eta(l)\bmod A'^p$, где $k\in K_{p+1}$, $l\in L$.

Рассмотрим спектральные последовательности $E^r_{p,q}$ и $E'^r_{p,q}$ DGA-модулей $K\otimes_\varphi L$ и $K\otimes_{\varphi^*}R_*$ соответственно, тогда ψ индуцирует изоморфизм $\psi_*: E^1_{p,q}\to E'^1_{p,q}$ и, следовательно, изоморфизм

$$\psi_*: H_*(K\otimes_\varphi L)\to H_*(K\otimes_{\varphi^*}R_*),$$

а так как $K\otimes_\varphi L$ и $K\otimes_{\varphi^*}R_*$ свободны, то ψ — цепная эквивалентность. Тем самым теорема $1'$ доказана полностью.

Из этой теоремы и теории Брауна получаем следующие утверждения.

Следствие $1'$. *Если для слабо транзитивного расслоения (X, B, p, λ) база B линейно связна и Λ — кольцо главных идеалов, то существует скрещивающая коцепь φ^*: $S(B)\otimes\Lambda\to S(F)\otimes\Lambda)^*$ такая, что комплексы $S(B)\otimes\Lambda\otimes_{\varphi^*}R_*$ и $S(X)\otimes\Lambda$ цепно эквивалентны.*

Следствие 2. *В условиях следствия $1'$ на модуле $C^*(B; R^*)$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный комплексу $C^*(X; \Lambda)$.*

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
22 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. А. Берикашвили*, О дифференциалах спектральной последовательности, Докт. дисс., Тбилисск. математич. инст. им. А. М. Размадзе, 1971. [2] *Э. Браун*, Сборн. пер., Математика, т. 6, 1, 33 (1962). [3] *G. Hirsch*, Bull. Soc. Math. Belg., v. 6, 79 (1953). [4] *G. Hirsch*, Bull. Soc. Math. France, v. 87, 361 (1959). [5] *П. Хилтон, С. Уайли*, Теория гомологий, М., 1966.