Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 550.831+.838 ГЕОФИЗИКА

В. Н. СТРАХОВ

О РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 25 III 1974)

1. Пусть $\rho \in Z$ и $f \in X$ — функции, описывающие распределение источников и основной элемент поля ([1]), Z и X — соответствующим образом выбранные метрические пространства (обычно Z — локально-выпуклое пространство, X — банахово).

Прямая задача (гравиметрии и магнитометрии) состоит в нахождении функционалов F_k над пространством X (линейных или нелинейных) на элементе f по формуле

$$F_k(f)=\Phi_k(\rho), \quad k=1,\ 2,\ldots,\ P, \tag{1}$$

где Φ_k — некоторые (зависящие от F_k) функционалы над пространством Z.

Обратная задача (гравиметрии, магнитометрии) состоит в нахождении функционалов ψ_k над пространством Z (линейных или нелинейных) на элементе ρ по формуле

$$\psi_k(\rho)=\theta_k(f), \quad k=1,\ 2,\ldots,\ R, \tag{2}$$

где θ_k — некоторые (зависящие от ψ_k) функционалы над пространством X. При этом элемент f фактически нам неизвестен, а заданным является некоторый набор приближенных значений $F_{j,\delta}(f)=F_j(f)+\delta F_j$ функционалов F_j над пространством X. Обычно все F_j — линейные функционалы ([1]).

2. Способы приближенного решения прямой задачи описываются формулой

$$F_k(f)\approx\Phi_k^*(\rho^*); \tag{3}$$

здесь ρ^* — распределение источников, аппроксимирующее распределение ρ, Φ_k^* — функционал, аппроксимирующий функционал Φ_k.

Соответственно способы приближенного решения обратной задачи описываются формулой

$$\psi_k(\rho)\approx\theta_k^*(f^*), \tag{4}$$

где $f^* \in X$ — элемент, аппроксимирующий элемент f, θ_k^* — функционал, аппроксимирующий функционал θ_k.

Метод подбора при решении обратной задачи состоит в использовании соотношения ($f^* \equiv f_{\rho'}$)

$$\theta_k^*(f_{\rho'})\equiv\Lambda_k(\rho'), \tag{5}$$

где ρ' — некоторое распределение источников поля, Λ_k — определяемый видом функционала θ_k функционал над пространством Z; ρ' определяется таким образом, чтобы величина

$$\nu(f,\ f_{\rho'})=\|\mathbf{F}_\delta(f)-\mathbf{F}(f_{\rho'})\|$$

была достаточно мала. Здесь $\mathbf{F}_\delta(f)=\mathbf{F}(f)+\delta\mathbf{F}$ — вектор с компонентами $F_{j,\delta}(f)$, $\mathbf{F}(f)$ и $\delta\mathbf{F}$ — векторы с компонентами $F_j(f)$ и δF_j, $j=1,\ 2,\ldots,\ N$, соответственно, $\mathbf{F}(f_{\rho'})$ — вектор с компонентами $\mathbf{F}_j(f_{\rho'})$.

В классическом методе подбора по вектору $\mathbf{F}_\delta(f)$ пытаются отыскать такой набор значений функционалов $\psi_k(\rho)$, $k=1,\ 2,\ldots,\ P$, которым элемент ρ определяется однозначно. В силу известной неоднозначности и неустойчивости решения обратной задачи этот подход связан с большими трудностями — даже при поиске приближенных решений в априорно заданных классах единственности решения обратной задачи. В связи с этим в настоящее время все большее и большее внимание уделяется методам подбора, в которых определяемый набор функционалов не дает возможности найти ρ, но характеризует некоторые основные черты распределения источников.

3. При решении прямой и обратной задачи гравиметрии и магнитометрии за распределения источников ρ^* (в (3)) и ρ' (в (5)) разумно выбирать некоторую совокупность точечных источников равной интенсивности. Кроме того при изучении аномалий, порожденных изолированными телами, в качестве системы функционалов (над пространством Z), характеризующих источники, разумно выбрать систему гармонических моментов источников относительно a priori заданной точки. Этот подход конкретизируется ниже для случая линейных аномалий, допускающих использование идеализации двухмерной задачи.

4. Пусть источники поля распределены по финитной области S (с плотностью $\delta(\xi, \zeta)$ в случае гравитационной задачи, с интенсивностью намагниченности $I(\xi, \zeta) = I_x(\xi, \zeta) + iI_z(\xi, \zeta)$ в случае магнитной, I_x и I_z — составляющие вектора намагниченности по соответствующим осям координат).

Обозначим через $s = x + iz$ комплексную переменную, $G(s) = g_z(x, z) + ig_x(x, z)$, $H(s) = Z(x, z) + iX(x, z)$ — комплексные напряженности аномальных внешних полей (гравитационного, магнитного). Имеем (f — универсальная гравитационная постоянная)

$$G(s) = 2if \iint\limits_S \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma - s} dS, \tag{6}$$

$$H(s) = 2i \iint\limits_S \frac{I(\xi, \zeta)}{(\sigma - s)^2} dS. \tag{7}$$

На бесконечности $G(s)$ и $H(s)$ представимы рядами Лорана:

$$G(s) = -2if \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(s_0)}{(s - s_0)^{n+1}}, \tag{8}$$

$$H(s) = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) M_n(s_0)}{(s - s_0)^{n+2}}; \tag{9}$$

здесь $m_n(s_0)$ и $M_n(s_0)$ — комплексные моменты тяготеющих и намагниченных масс относительно точки s_0:

$$m_n(s_0) = \iint\limits_S \delta(\xi, \zeta) (\sigma - s_0)^n dS, \tag{10}$$

$$M_n(s_0) = \iint\limits_S I(\xi, \zeta) (\sigma - s_0)^n dS. \tag{11}$$

Пусть ρ и ρ^* — два различных распределения источников (тяготеющих, намагниченных масс). Будем говорить, что распределение ρ^* аппроксимирует распределение ρ с гравитационной (магнитной) степенью точности n, если для любой точки s_0

$$m_k^{\rho}(s_0) = m_k^{\rho^*}(s_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

(гравитационная задача);

$$M_k^{\rho}(s_0) = M_k^{\rho^*}(s_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

(магнитная задача). Верхние индексы ρ и ρ' указывают, для какого распределения источников вычисляются моменты.

Нетрудно видеть, что если (12) — (13) выполняются для некоторой одной точки s_0, то они выполняются и для любой точки s_0.

5. Приведем алгоритм построения по заданному распределению источников ρ (по финитной области S) распределения n точечных источников равной интенсивности, обладающего (гравитационной, магнитной) степенью точности n. Для простоты рассмотрим случай гравитационной задачи. Пусть величины $m^\rho = m_0(0)$, $m_k^\rho(0)$, $k=1, 2, \ldots, n$, найдены. (Их нахождение сводится к вычислению интегралов (10); здесь может быть дано много различных формул, например, если $\delta(\xi, \zeta) = \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})$, $\bar{\sigma} = \xi - i\zeta$, есть аналитическая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция своих аргументов, то

$$m_k^\rho(s_0) = \frac{1}{2i} \int_\Gamma \Phi(\sigma, \bar{\sigma})\, (\sigma - s_0)^n\, d\sigma, \tag{14}$$

где

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})\, d\bar{\sigma}, \tag{15}$$

а Γ есть граница области S.) Положим $\mu = m^\rho/n$ (следовательно, $m^{\rho'} = m^\rho$). Для моментов $m_k^{\rho'}(0)$ от распределения n точечных источников с координатами s_m, $m=1, 2, \ldots, n$, имеем выражения

$$m_k^{\rho'}(0) = \mu \sum_{m=1}^{n} s_m^k, \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Пользуясь условиями (12) и полагая $\lambda_k = m_k^\rho(0)/\mu$, получаем для определения чисел s_m систему уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} s_m^k = \lambda_k, \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Как известно (см. [2, 3] и др.), числа s_m являются корнями алгебраического уравнения степени n

$$\omega(s) = s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \tag{18}$$

коэффициенты которого определяются из системы линейных уравнений с треугольной матрицей

$$\begin{gathered} \lambda_1 + A_1 = 0, \\ \lambda_2 + A_1\lambda_1 + 2A_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n + A_1\lambda_{n-1} + \ldots + nA_n = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Нахождение корней уравнения $\omega(s) = 0$ может осуществляться известными методами — наискорейшего спуска, парабол и т. д. (см. [4, 5] и др.).

Подчеркнем как особо важное то обстоятельство, что на практике число n можно взять относительно небольшим, особенно в рудных задачах.

6. Приведенный алгоритм аппроксимации точечными массами допускает обращение, которое может быть положено в основу алгоритма подбора полей (заданных значениями некоторой системы функционалов) в рудной гравиметрии и магнитометрии, когда исследуемое поле порождается одним возмущающим телом.

Алгоритм подразделяется на две части: 1) по заданной системе функционалов $F_{j,\delta}(f)$ строится совокупность (приближенных значений $G_\delta(s_j)$, $j=1, 2, \ldots, M$, и определяется приближенное значение m_δ суммарной массы аномалиеобразующего объекта;

2) по приближенным значениям функции $G(s)$ находятся приближенные значения функции

$$\Sigma(s)=\exp\left[-\frac{1}{2ifm}\int_0^s G(s)\,ds\right] \tag{20}$$

и далее отыскивается такое (наименьшее) число n, чтобы функция

$$\Sigma_n(s)=(\Sigma(s))^n \tag{21}$$

с разумной степенью точности аппроксимировалась полиномом степени n:

$$\Sigma_n(s)\approx\omega_n(s)=B_0s^n+B_1s^{n-1}+\ldots+B_n. \tag{22}$$

Корни s_m, $m=1, 2,\ldots, n$, уравнения $\omega_n(s)=0$ принимаются за координаты точечных масс; величина массы принимается равной $\mu\approx\mu_\delta=m_\delta/n$. По найденной аппроксимации точечными массами возможен подсчет моментов порядков $m=1, 2,\ldots, n$, которые затем принимаются за моменты искомого распределения масс.

7. Пусть аппроксимация точечными массами построена. Если известно, что исследуемая аномалия порождена массами известной постоянной плотности δ, распределенными по конечной односвязной области S с простой опрямляемой жордановой границей Γ, то (приближенно) область S может быть найдена с помощью алгоритмов выметания, предложенных Д. Зидаровым (см. ([6-8])). Возможно также использование алгоритмов типа предложенных в работе ([9]).

8. Обобщение описанных алгоритмов решения прямой и обратной задачи гравиметрии на случай магнитного поля очевидно.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Н. Страхов*, ДАН, т. 211, № 1 (1973). [2] *А. П. Мишина, И. В. Проскуряков*, Высшая алгебра, сер. Справ. матем. библ., М., 1961. [3] *В. И. Крылов*, Приближенное вычисление интегралов, М., 1959. [4] *В. В. Воеводин*, Численные методы алгебры, «Наука», 1966. [5] *В. Л. Загускин*, Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, М., 1960. [6] *Д. П. Зидаров*, О решении обратной задачи потенциала и его применении в геофизике, София, 1968. [7] *D. Zidarov, Zh. Zhelev*, Geophys. Prosp., v. 28, № 1 (1970). [8] *Ж. Желев*, Изв. на Геофиз. инст., т. 18, София, 1972. [9] *В. Н. Страхов*, ДАН, т. 213, № 1 (1973).