Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 517.55 МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

# ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ТЕМЛЯКОВА С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ $n$-МЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^n$

*(Представлено академиком С. М. Никольским 6 V 1974)*

В теории интегральных представлений функций многих комплексных переменных хорошо известны ([1-3]) интегральные представления Темлякова. В случае двух комплексных переменных показано ([4]), что, наряду с интегральными представлениями Темлякова I и II рода, которые объединяются в одну интегральную формулу Темлякова, существуют еще интегральные представления Темлякова I и II рода с определяющим двумерным многообразием, которые также объединяются в одну интегральную формулу Темлякова с определяющим двумерным многообразием.

Если в интегральной формуле Темлякова многообразие, на котором должна быть известна функция $\Phi(z_1, z_2)=L_{2-k,1}^{(k)}[f(z_1, z_2)]$, есть, вообще говоря, либо вся граница той области, в которой $f(z_1, z_2)$ голоморфна, либо трехмерная часть этой границы, то в интегральной формуле Темлякова с определяющим двумерным многообразием роль этого указанного выше многообразия играет двумерное многообразие. При этом двумерное многообразие может принадлежать либо границе той области, в которой $f(z_1, z_2)$ голоморфна, либо самой этой области. В настоящей статье решается задача установления интегральной формулы Темлякова в случае $n$, $n\geqslant 2$, комплексных переменных с определяющим $n$-мерным многообразием.

Пусть $\Delta$ — $(n-1)$-мерный симплекс,

$$\Delta=\{\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_n):\ \tau_1+\ldots+\tau_n=1,\ \tau_1>0, \ldots, \tau_n>0\}.$$

Говорят ([5]), что ограниченная область $D$ в пространстве $C^n$ $n$ комплексных переменных $z=(z_1,\ldots, z_n)$, $n\geqslant 2$, является областью типа $(T)$ (кратко $D\in(T)$), если существуют положительные вещественные функции

$$r_k=r_k(\tau), \quad k=1, \ldots, n, \tag{1}$$

определенные и непрерывные для $\tau\in\Delta$ такие, что

$$D=\bigcup_{\tau\in\Delta}\{z\colon |z_k|<r_k(\tau),\ k=1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

$$D=\text{внутр.}\bigcap_{\tau\in\Delta}\left\{z\colon \sum_{k=1}^{n}\frac{\tau_k}{r_k(\tau)}|z_k|<1\right\}. \tag{3}$$

Положим

$$\Delta^*=\{(\tau_2,\ldots, \tau_n):\ 0<\tau_2<1,\ 0<\tau_3<1-\tau_2,\ldots,\ 0<\tau_n<1-\tau_2-\tau_3-\ldots-\tau_{n-1}\}.$$

Установлено ([5]), что для того, чтобы ограниченная в $C^n$ область $D$ принадлежала к типу $(T)$, необходимо и достаточно, чтобы она была выпуклой полной $n$-круговой областью. Для каждой ограниченной выпуклой полной $n$-круговой области $D$ существует единственная система функций (1), удовлетворяющая условиям (2) и (3).

Определение. $n$-мерное многообразие

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n): |z_1|=R_1, \ldots, |z_n|=R_n;\ R_1, \ldots, R_n>0\},$$

принадлежащее области $D\in(T)$ или ее границе $\partial D$, назовем **определяющим $n$-мерным многообразием** и обозначим через $E(R_1, \ldots, R_n)$, или кратко $E(R)$.

Положим

$$\int d\omega_\tau = \int\limits_{\Delta^*} d\tau_2 \ldots d\tau_n, \quad \int d\omega_\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{2\pi} d\theta_n.$$

Пусть $p$, $q$ — натуральные числа с условием $p\geqslant q$, $m_p, m_{p-1}, \ldots, m_q, m_0$ — любые натуральные числа и $f=f(z)$, $n\geqslant 2$,— функция, голоморфная в области $D\in(T)$. Возьмем оператор

$$L^{(p-q+1)}_{\binom{m_q}{m_p}}[f] \equiv L_{m_p}[L_{m_{p-1}} \ldots [L_{m_q}[f]] \ldots],$$

где

$$L_{m_j}[f] \equiv m_j f + \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu f_\nu', \quad f_\nu' = f_{z_\nu}', \ j=q, \quad q=1, \ldots, p,$$

причем

$$L^{(0)}_{\binom{m_p}{m_{p-1}}}[f] \equiv f, \qquad p\geqslant 1.$$

Теорема. *Пусть $D\in(T)$, функция $f(z)$, $n\geqslant 2$, голоморфна в $D$.*

*Тогда, если функция $f(z)$ и все ее частные производные до порядка $\lambda$, $0\leqslant\lambda\leqslant n-1$, включительно непрерывны на $E(R)$, то для $k=0, 1, \ldots, \lambda$ и $z\in D$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{2n} i} \int\limits_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int\limits_0^{+\infty} dt_n \int d\omega_\tau \int \mu\, d\omega_\varphi \int d\omega_\theta \times$$
$$\times \int\limits_{|\zeta|=1} L^{(n-k-1)}_{\binom{m_1}{m_{n-k-1}}} \left[\frac{1}{\zeta-\tilde u}\right] L^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}} [F_0(\zeta, R, \theta)]\, d\zeta, \tag{4}$$

где $m_1, \ldots, m_{n-1}$ — любые, но все различные натуральные числа, взятые из $\{1, \ldots, n-1\}$,

$$\int \mu\, d\omega_\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \ldots \int\limits_0^{2\pi} \mu\, d\varphi_n,$$

$$\mu=\mu(t, \tau, \varphi, R) = \exp \sum_{k=1}^{n} t_k \left(\frac{r_k(\tau)}{R_k} e^{-i\varphi_k} - 1\right),$$

$$F_0(\zeta, R, \theta) = f(R_1\zeta, R_2\zeta e^{i\theta_2}, \ldots, R_n\zeta e^{i\theta_n}),$$

$$\tilde u = \frac{\tau_1}{r_1(\tau)} z_1 e^{i\varphi_1} + \frac{\tau_2}{r_2(\tau)} z_2 e^{i(\varphi_2-\theta_2)} + \ldots + \frac{\tau_n}{r_n(\tau)} z_n e^{i(\varphi_n-\theta_n)}.$$

Формулу (4) назовем интегральной формулой Темлякова с определяющим $n$-мерным многообразием. Эта формула выражает значения функции $f(z)$ в области $D$ через значения оператора $L^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}}[F_0]$ на $E(R)$.

При доказательстве теоремы используются представимость функции $f(z)$ кратным степенным рядом, устанавливаемая непосредственным под счетом формула

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n-1}} \int_0^{+\infty} dt_1 \ldots \int_0^{+\infty} dt_n \int d\omega_\tau \int \mu d\omega_\varphi \int L^{(n-1)}_{\binom{m_1}{m_{n-1}}} [(R_1\tilde{u})^{l_1} (R_2\tilde{u}e^{i\theta_2})^{l_2} \ldots$$

$$\ldots (R_n\tilde{u}e^{i\theta_n})^{l_n}] d\omega_\theta = z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$$

($l_1, \ldots, l_n$ — целые неотрицательные числа), свойства оператора $L^{(n-1)}_{\binom{m_1}{m_{n-1}}}$ и формула Коши одного комплексного переменного.

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (4) видно, что она обладает такой же важной особенностью (связью с интегралом Коши), что и интегральная формула Темлякова ([6]), формула (3) при $\alpha=0$).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что при $m_1=1, \ldots, m_{n-1}=n-1$

$$L^{(n-k-1)}_{\binom{m_1}{m_{n-k-1}}} \left[\frac{1}{\zeta - \tilde{u}}\right] = (n-k-1)! \frac{\zeta^{n-k-1}}{(\zeta - \tilde{u})^{n-k}};$$

если $k=n-1$ ($\lambda=n-1$), то эта функция принимает вид $1/(\zeta-\tilde{u})$. Заметим также, что при $k=0$

$$L^{(n-k-1)}_{\binom{m_1}{m_{n-k-1}}} \left[\frac{1}{\zeta - \tilde{u}}\right] L^{(k)}_{\binom{m_{n-k}}{m_{n-1}}} [F_0(\zeta, R, \theta)] = \frac{\zeta^{n-1}}{(\zeta - \tilde{u})^n} F_0(\zeta, R, \theta).$$

З а м е ч а н и е 3. Полагая $\zeta=e^{i\psi}$, $\tilde{u}=\rho e^{i\Psi}$, в формуле (4) (с надлежащими изменениями) можно перейти от $1/(\zeta-\tilde{u})$ к $(e^{i\psi}+\tilde{u})/(e^{i\psi}-\tilde{u})$ и к $(1-\rho^2)/[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\Psi)]$. Получаемые при этом формулы будем называть соответственно интегральными формулами Шварца — Темлякова и Пуассона — Темлякова с определяющим $n$-мерным многообразием.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
28 IV 1974

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Темляков*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 89 (1957). [2] *А. А. Темляков*, ДАН, т. 120, № 5 (1958). [3] *Б. А. Фукс*, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [4] *И. И. Баврин, Г. Н. Бакунин*, ДАН, т. 217, № 1 (1974). [5] *Z. Opial, J. Siciak*, Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., № 77, 67 (1963). [6] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 169, № 3 (1966).