

Д. В. БОТНАРУ

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ПОДКАТЕГОРИИ И ПРАВЫЕ БИКАТЕГОРНЫЕ СТРУКТУРЫ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 V 1974)

Рефлексивные подкатегории рассматривались в работах ^(1, 2), бикатегорные структуры, а также «односторонние» бикатегорные структуры — в работах ^(1, 3-5). В настоящей заметке метод, примененный в работе ⁽²⁾ к бикатегорным структурам (б.с.), распространяется на правые бикатегорные структуры (п.б.с.). Для колокально малой категории ⁽¹⁾, полной справа или слева, строится функция, отображающая класс всех п.б.с. на класс всех эпирефлексивных подкатегорий. Таким образом, класс п.б.с. разбивается на непересекающиеся подклассы. Доказывается ряд свойств этой функции и этих подклассов. При этих же условиях класс проекций каждой п.б.с. допускает исчисление левых частных ⁽²⁾. Доказывается, что категории левых частных, построенные таким образом для двух п.б.с., изоморфны, если и только если эти п.б.с. принадлежат одному и тому же классу разбиения. Рассматривается задача о продолжении на всю категорию п.б.с., заданной на рефлексивной подкатегории.

В дальнейшем $\mathcal{C}$ означает категорию, а также класс всех ее морфизмов; $|\mathcal{C}|$ — класс всех ее объектов; M, E, M_u, E_u — соответственно классы всех ее мономорфизмов, эпиморфизмов, устойчивых (=универсальных ⁽⁶⁾) мономорфизмов и устойчивых эпиморфизмов. П.б.с. будем обозначать иногда одной буквой, например, $\mathcal{E}$, понимая под $\mathcal{E}$ класс проекций; соответствующий класс инъекций будем обозначать $\mathcal{E}^\perp$ ⁽³⁾. (В ⁽⁴⁾ используются обозначения $\mathcal{E}^+$ вместо $\mathcal{E}^\perp$ и $\mathcal{E}^+$ вместо $\mathcal{E}^\perp$.) $\mathcal{CT}_2\mathcal{V}$ будет означать категорию отделимых локально-выпуклых пространств.

1. Определение ⁽¹⁾. Семейство $\mathcal{G}$ объектов категории $\mathcal{C}$ называется семейством ее образующих, если для любого дублета $X \xrightarrow{\alpha} Y$ из $\mathcal{C}$ с $\alpha \neq \beta$ существуют $G \in \mathcal{G}$ и $\gamma: G \rightarrow X$ такие, что $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Дуально определяется семейство кообразующих.

1. Пусть $\mathcal{D}$ — рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$ и $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — функтор рефлексии ⁽¹⁾; тогда следующие условия равносильны:

- T — унивалентный функтор;
- $\mathcal{D}$ M -рефлексивна;
- $\mathcal{D}$ $E \cap M_u$ -рефлексивна.

2. Пусть $\mathcal{D}$ — рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{D}$ содержит семейство кообразующих категорий $\mathcal{C}$, то $\mathcal{D}$ $E \cap M_u$ -рефлексивна.

Следствие. Рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{CT}_2\mathcal{V}$, содержащая ненулевой объект, $E \cap M_u$ -рефлексивна.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{V}$ — классы морфизмов категории $\mathcal{C}$. Класс $\mathcal{E}$ называется $\mathcal{V}$ -экстремальным, если из того, что $\alpha\beta \in \mathcal{E}$ и $\beta \in \mathcal{V}$, следует, что $\beta \in \mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E}$ — класс морфизмов из $\mathcal{C}$. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$ такую, что $Z \in |\mathcal{P}(\mathcal{E})|$, если и только если для любых $\varepsilon: X \rightarrow Y$ из $\mathcal{E}$ и $\alpha: X \rightarrow Z$ из $\mathcal{C}$ существует, притом единственный, $\beta: Y \rightarrow Z$ из $\mathcal{C}$ такой, что $\beta\varepsilon = \alpha$ ^(2, 4).

Теорему 18 статьи ⁽²⁾ можно усилить следующим образом:

3. Пусть $\mathcal{C}$ — с любыми произведениями, $\mathcal{V}$ — п.б.с. в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ $\mathcal{V}$ -колокально мала (¹). Тогда $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ — $\mathcal{V}$ -рефлексивная подкатегория для любого класса $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$.

При сделанных предположениях относительно категории $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}^{\perp\top}$ — п.б.с. в $\mathcal{C}$ (⁵), предположение 7), $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathcal{E}^{\perp\top})$ и $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ — $\mathcal{E}^{\perp\top}$ -рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$.

4. Пусть $\mathcal{E}$ — п.б.с. в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ $\mathcal{E}$ -колокально мала. Если $\mathcal{C}$ — категория с кодекартовыми квадратами и для любого объекта существует объединение семейства всех его $\mathcal{E}$ -фактор-объектов (в частности, если $\mathcal{C}$ полна справа), то $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ — $\mathcal{E}$ -рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$.

II. В дальнейшем в $\mathcal{C}$ фиксируется некоторая п.б.с. $\mathcal{V}$ и предполагается, что $\mathcal{C}$ $\mathcal{V}$ -колокально мала и либо полна справа, либо обладает любыми произведениями. Пусть Π — класс всех п.б.с. $\mathcal{E}$ таких, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$; $\Pi_e = \{\mathcal{E} \in \Pi: \mathcal{E} \text{ } \mathcal{V}\text{-экстремален}\}$; $\Pi_u = \{\mathcal{E} \in \Pi: \mathcal{E} \subset M_u\}$; $\Pi_{eu} = \Pi_e \cap \Pi_u$. Пусть R — класс всех $\mathcal{V}$ -рефлексивных подкатегорий категории $\mathcal{C}$; $R_u = \{\mathcal{D} \in R: \mathcal{D} \text{ } M_u\text{-рефлексивна}\}$.

В дальнейшем в предположениях, где рассматривается класс Π_u , предполагается, что класс M_u $\mathcal{V}$ -экстремален.

Пусть $t: \Pi \rightarrow R$, где $t(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ для всех $\mathcal{E} \in \Pi$. Сужение этого отображения на Π_e , Π_u , Π_{eu} обозначим соответственно через r , u , e . Имеем $u(\Pi_u) = R_u$, поэтому будем считать, что $u: \Pi_u \rightarrow R_u$, $e: \Pi_{eu} \rightarrow R_u$. Будем считать также Π (соответственно R) категорией, класс объектов которой — класс Π (R), и если $\mathcal{E}, \mathcal{H} \in \Pi$ ($\mathcal{D}, \mathcal{F} \in R$), то существует и притом единственный морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ ($\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$), только если $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ ($|\mathcal{D}| \subset |\mathcal{F}|$).

5. а) Π , Π_e , R — полные категории; Π_u , Π_{eu} (R_u) — полные слева (справа) категории; если $\mathcal{C}$ полна справа и сумма (⁶) устойчивых мономорфизмов есть устойчивый мономорфизм, то Π_u , Π_{eu} , R_u — полные категории;

б) t , u — контравариантные функторы; r , e — контравариантные функторы, устанавливающие изоморфизм соответствующих категорий;

с) $r^{-1}(\mathcal{D}) = \{\alpha \in \mathcal{V}: T(\alpha) \text{ — изоморфизм}\} = \{\alpha \in \mathcal{V}: (\exists \beta) \quad \beta\alpha = \alpha_X\}$ для каждого $\mathcal{D} \in R$, где $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — функтор рефлексии, $\alpha: X \rightarrow \cdot$ и $(X_{\mathcal{D}}, \alpha_X)$ — $\mathcal{D}$ -реплика объекта X ;

д) $r^{-1}t: \Pi \rightarrow \Pi_e$, $e^{-1}u: \Pi_u \rightarrow \Pi_{eu}$ — функторы рефлексии; $r^{-1}t(\mathcal{E}) = \{\alpha \in \mathcal{V}: (\exists \beta) \quad \beta\alpha \in \mathcal{E}\}$ для каждого $\mathcal{E} \in \Pi$; $e^{-1}u(\mathcal{E}) = r^{-1}t(\mathcal{E})$ для каждого $\mathcal{E} \in \Pi_u$.

Следствие. Пусть $\mathcal{V} = E$ в $\mathcal{CT}_2\mathcal{V}$. Так как $R = R_u \cup \{0\}$, где 0 — подкатегория, состоящая из одного нулевого объекта, то $\Pi_e = \Pi_{eu} \cup \{E\}$.

6. Пусть $\mathcal{D} \in R$, тогда $t^{-1}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{E} \in \Pi: \mathcal{D} \text{ } \mathcal{E}\text{-рефлексивна и } \mathcal{D} \subset \mathcal{E}^{\perp}\}$.

Пусть $\mathcal{D}, \mathcal{F} \in R$ и $|\mathcal{F}| \subset |\mathcal{D}|$. Пусть $X \in |\mathcal{C}|$, $(X_{\mathcal{F}}, \varphi_X)$ — $\mathcal{F}$ -реплика объекта X , а $(X_{\mathcal{D}}, \alpha_X)$ — $\mathcal{D}$ -реплика.

Тогда существует единственный морфизм $\beta_X: X_{\mathcal{D}} \rightarrow X_{\mathcal{F}}$ такой, что $\varphi_X = \beta_X \alpha_X$.

7. $t^{-1}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{E} \in \Pi: \mathcal{E} \subset r^{-1}(\mathcal{F}) \text{ и } \forall X \in |\mathcal{C}| \quad \beta_X \alpha_X \text{ есть } (\mathcal{E}, \mathcal{E}^{\perp})\text{-разложение } \varphi_X\}$. В частности, если $\mathcal{F} = t(\mathcal{V})$ и $(X_0, \tau_X) = t(\mathcal{V})$ -реплика объекта X , то $t^{-1}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{E} \in \Pi: \forall X \in |\mathcal{C}| \quad X \xrightarrow{\alpha_X} X_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\beta_X} X_0 \text{ есть } (\mathcal{E}, \mathcal{E}^{\perp})\text{-разложение } \tau_X\}$.

Заметим, что справедлива и обратная теорема. Пусть $\mathcal{D}$ — рефлексивная подкатегория $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ — п.б.с. в $\mathcal{C}$. Пусть $X \in |\mathcal{C}|$, $(X_{\mathcal{D}}, \alpha_X)$ — $\mathcal{D}$ -реплика объекта X , а $X \xrightarrow{\varepsilon_X} X_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\nu_X} X_{\mathcal{D}}$ — некоторое $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^{\perp})$ -разложение α_X . Пусть $\mathcal{B}$ — полная подкатегория категории $\mathcal{C}$, где $|\mathcal{B}| = \{Y \in |\mathcal{C}|: Y \sim X_{\mathcal{B}}, X \in |\mathcal{C}|\}$. Тогда $\mathcal{B}$ — $\mathcal{E}$ -рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$, а $\mathcal{D}$ — $\mathcal{E}^{\perp}$ -рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{B}$.

Для $\mathcal{D} \in R$ положим $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \{\alpha_X: X \in |\mathcal{C}|\}$, где $(X_{\mathcal{D}}, \alpha_X)$ — $\mathcal{D}$ -реплика объекта X .

8. Пусть $\mathcal{D} \in R$, тогда:

а) $t^{-1}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{E} \in \Pi: \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{\perp \top} \subset \mathcal{E} \subset r^{-1}(\mathcal{D})\}$, тем самым $t^{-1}(\mathcal{D})$ — полная категория, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{\perp \top}$ — ее инициальный объект, а $r^{-1}(\mathcal{D})$ — финальный;

б) пусть категория $\mathcal{C}$ обладает нулевым объектом и $t(\mathcal{V})$ состоит из одного нулевого объекта категории $\mathcal{C}$.

Тогда $t^{-1}t(\mathcal{V})$ содержит все б.с. из Π . Если, кроме того, $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию: $(\mu\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0) \Rightarrow \mu \in M$, то $t^{-1}t(\mathcal{V})$ содержит все б.с. из Π и только их.

Следствие. Если $\mathcal{E}$ — п.б.с. в $\mathcal{CF}_2\mathcal{V}$, то либо $\mathcal{E}$ — б.с., либо $\mathcal{E} \subset M_u$.

III. Если $\Sigma \in \Pi$, то класс Σ допускает исчисление левых частных ⁽⁹⁾. Пусть $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$ — категория левых частных, а ${}_2P: \mathcal{C} \rightarrow \Sigma^{-1}\mathcal{C}$ — функтор вложения. Тогда существует и притом единственный функтор $G: \Sigma^{-1}\mathcal{C} \rightarrow t(\Sigma)$ такой, что $G{}_2P = T$, где $T: \mathcal{C} \rightarrow t(\Sigma)$ — функтор рефлексии.

9. Пусть $\Phi, \Sigma \in \Pi$, $\Phi^{-1}\mathcal{C} = \Sigma^{-1}\mathcal{C}$, если и только если $t(\Phi) = t(\Sigma)$.

10. Пусть $\mathcal{V}$ — E -экстремален (в частности, $\mathcal{V} = E$); тогда следующие условия равносильны:

- T — унивалентный функтор;
- G устанавливает эквивалентность соответствующих категорий;
- $r^{-1}t(\Sigma) = \{\alpha \in \mathcal{C}: T(\alpha) \text{ — изоморфизм}\}$.

Пример. Класс $E_u \cap M_u$ в $\mathcal{CF}_2\mathcal{V}$ допускает исчисления левых и правых частных, так как $E_u \cap M_u$ — п.б.с., а также является классом инъекций некоторой левой б.с. Соответствующими рефлексивной и корефлексивной подкатегориями служат категория отделимых локально-выпуклых пространств со слабой топологией и категория отделимых локально-выпуклых пространств с топологией Макки.

IV. Пусть $(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ — п.б.с. в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D} - \mathcal{H}$ -рефлексивная подкатегория категории $\mathcal{C}$. Тогда $(\mathcal{D} \cap \mathcal{H}, \mathcal{D} \cap \mathcal{L})$ — п.б.с. в $\mathcal{D}$. Обратно пусть $\mathcal{D} \in R$, $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ — п.б.с. в $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Положим $\mathcal{N}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = \{(\mathcal{H}, \mathcal{L}) \in \Pi: \mathcal{D} - \mathcal{H}\text{-рефлексивна и } (\mathcal{D} \cap \mathcal{H}, \mathcal{D} \cap \mathcal{L}) = (\mathcal{E}, \mathcal{M})\}$, $Q = (\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \cup \mathcal{E})^{\perp \top}$ и $\mathcal{P} = \{\alpha \in \mathcal{V}: T(\alpha) \in \mathcal{E}\}$, где $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — функтор рефлексии.

11. а) $\mathcal{P} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}^{\top}$; $t^{-1}t(\mathcal{P}) \supset \mathcal{N}(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = \{\mathcal{H} \in \Pi: Q \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{P}\}$, тем самым $\mathcal{N}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ — полная категория, Q — ее инициальный объект, а $\mathcal{P}$ — финальный;

б) $\mathcal{P} = r^{-1}t(\mathcal{P})$, если и только если класс $\mathcal{E} - \mathcal{D} \cap \mathcal{V}$ -экстремален в $\mathcal{D}$.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
27 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. E. Kennison, III. J. Math., v. 12, № 3 (1968). ² D. Pumplün, Math. Ann., B. 198, H. 2 (1972). ³ Д. А. Райков, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4 (1972). ⁴ P. J. Freyd, G. M. Kelly, J. Pure Appl. Algebra, v. 2 (1972). ⁵ Д. В. Ботнару, ДАН, 249, № 2 (1974). ⁶ И. Букур, А. Деляну, Введение в теорию категорий и функторов, М., 1972. ⁷ N. Popescu, A. Radu, Teoria categoriilor și a fasciculelor, București, 1971. ⁸ А. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961. ⁹ П. Габриэль, М. Цисман, Категории частных и теория гомотопий, М., 1971.