Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.51:518.5

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ε-ЭНТРОПИИ В h_p-ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 III 1974)

1. Пусть X — метрическое пространство, A — некоторый компакт в X, а $H_\varepsilon^X(A)$, $H_\varepsilon(A)$, $\mathscr{C}_\varepsilon(A)$ — соответственно ε — энтропия A относительно X, абсолютная ε-энтропия и ε-емкость A по А. Н. Колмогорову (см. ([1], [2])). Для любого непустого компакта A определенные при всех $\varepsilon>0$ функции $H_\varepsilon^A(A)$, $H_\varepsilon(A)$ и $\mathscr{C}_\varepsilon(A)$ обладают свойствами:

1) они не отрицательны,
2) не возрастают,
3) обращаются в нуль, начиная с некоторого $\varepsilon>0$,
4) непрерывны справа при всех $\varepsilon>0$ (см. ([2]), § 1).

Функции $f(\varepsilon)$, обладающие свойствами 1)—4) и такие, для которых $2^{f(\varepsilon)}$ — натуральные числа, поэтому естественно назвать энтропийными. Обратная задача для ε-энтропии (см. ([3]), стр. 690) состоит в решении вопроса о том, всегда ли в бесконечномерном банаховом пространстве X существуют компакты A, ε-энтропия или ε-емкость которых при всех $\varepsilon>0$ совпадает с произвольно заданной энтропийной функцией $f(\varepsilon)$. В случае пространства C положительный ответ на этот вопрос для $H_\varepsilon^C(A)$ получен в работе ([4]), а для $H_\varepsilon^A(A)$, $H_\varepsilon(A)$ и $\mathscr{C}_\varepsilon(A)$ — в ([5]). Но если $X=l_2$, то для $H_\varepsilon^X(A)$ дело обстоит уже иначе (см. ([4])). Вместе с тем мы устанавливаем здесь, что для $H_\varepsilon^A(A)$, $H_\varepsilon(A)$ и $\mathscr{C}_\varepsilon(A)$ рассматриваемая обратная задача во всех L_p-пространствах $(p\geqslant1)$ имеет положительное решение.

2. Рассмотрим некоторое пространство с мерой (Y, S, μ) и при заданном $p\geqslant1$ линейное нормированное пространство $L_p(\mu)$ всех измеримых функций $F(y)$, $y\in Y$, для которых

$$\|F\|_p=\left\{\int_Y |F(y)|^p\,dy\right\}^{1/p}<\infty.$$

Будем считать, что Y содержит бесконечное число попарно непересекающихся измеримых подмножеств положительной меры. Справедливо следующее предложение.

Теорема 1. *Какой бы ни была энтропийная функция $f(\varepsilon)$, в пространстве $L_p(\mu)$, $p\geqslant1$, существует компакт A, для которого*

$$H_\varepsilon^A(A)=\mathscr{C}_\varepsilon(A)=H_\varepsilon(A)=f(\varepsilon)$$

при всех $\varepsilon>0$.

В случае, когда $p=\infty$, этот результат, благодаря универсальности пространства L_∞, эквивалентен результату В. Я. Крейновича ([5]), указавшего некоторый метрический компакт A, для которого имеет место последнее равенство. Исследование случая, когда p конечно, связано с рассмотрением одной постановки вопроса, относящейся к так называемым ультраметрическим пространствам.

3. Метрическое пространство R с метрикой ρ называют ультраметрическим (см., например, ([6]), стр. 52), если в нем неравенство треугольника $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(y, z)$ для любых точек $x, y, z\in R$ выполняется в усиленном виде

$$\rho(x, y)\leqslant\max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\}. \qquad (u)$$

Тривиальным примером ультраметрического пространства является любое дискретное метрическое пространство, т. е. пространство R, в котором $\rho(x, y)=1$ для всех $x, y \in R$, $x \neq y$. Среди нетривиальных примеров таких пространств хорошо известными являются бэровское нуль-пространство (см. ([7]), стр. 104), пространство $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел и пространство $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел (см. ([8])).

Можно показать, что, если R — ультраметрическое пространство, то каким бы ни было натуральное $n \geqslant 2$ и система точек $x_1, \ldots, x_n \in R$ среди $^1/_2 n(n-1)$ чисел $d_{ij}=\rho(x_i, x_j)$, $i, j=1, \ldots, n$; $i \neq j$, количество r попарно различных всегда не превышает $n-1$, а наибольшее из них имеет кратность $s \geqslant n-1$. При $n=3$ это утверждение известно. Оценки $1 \leqslant r \leqslant n-1 \leqslant s \leqslant$ $\leqslant {}^1/_2 n(n-1)$ при любом $n \geqslant 2$ неулучшаемы.

Множество A метрического пространства R назовем ультраметрическим, если A, как метрическое пространство с метрикой, индуцированной из R, является ультраметрическим пространством. Ультраметрическим множеством в метрическом пространстве R является любая конечная или бесконечная последовательность A точек $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \in R$, для которой $\rho(a_i, a_j)=d_i$, при $j>i$, где $A \subset R$ — произвольная невозрастающая последовательность неотрицательных чисел. Такие ультраметрические последовательности $A \subset R$ мы будем обозначать через $A(d; R)$.

Примером ультраметрического множества в пространстве C может служить произвольное множество финитных функций с попарно не пересекающимися носителями, а примером последовательности $A(d; C)$ — всякая равномерно сходящаяся к нулю и соответствующим образом занумерованная последовательность таких функций. Рассмотрение подобных примеров показывает, что причина геометрических особенностей, вызванных неравенством (u), часто обусловливается не каким-то особым характером метрики, которая может оказаться индуцированной той или иной обычной метрикой, а специальным взаимным расположением точек. В связи с этим возникает задача о возможности изометрического вложения различных ультраметрических пространств в пространство с наперед заданной метрикой. Результат, позволивший доказать теорему 1, относится к вопросу о возможности реализации счетных ультраметрических пространств $R(d; R)$ в виде последовательности $A(d; L_p)$ относительно L_p-метрики, где $1 \leqslant p < \infty$. Возможность такой реализации в пространстве L_∞ является непосредственным следствием свойства универсальности этого пространства и независимо легко осуществляется эффективно.

Пример метрического пространства, состоящего из четырех точек (x_1, x_2, x_3, x_4) с метрикой $\rho(x_1, x_2)=\rho(x_1, x_3)=\rho(x_2, x_3)=1$, $\rho(x_1, x_4)=$ $=\rho(x_2, x_4)=1/\sqrt{3}$, $\rho(x_3, x_4)=a$, $1-1/\sqrt{3}<a<1/\sqrt{3}$, не вкладывающегося изометрично в пространство l_2, иллюстрирует содержательность приведенной постановки вопроса.

4. Вопрос об изометрическом вложении ультраметрических пространств в заданное метрическое пространство каждый раз связан с вопросом о существовании решения соответствующих систем нелинейных уравнений. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная вещественная четная функция, которая на положительной полуоси $t \geqslant 0$ удовлетворяет условиям: 1) $\varphi(t)$ непрерывна; 2) $\varphi(0)=0$; 3) $\varphi(t_1)<\varphi(t_2)$ при $t_1<t_2$; 4) $\varphi(t')+\varphi(t'') \leqslant \varphi(t'+t'')$. Имеет место

Теорема 2. *Какой бы ни была числовая последовательность $d_\nu \downarrow$, $d_\nu \geqslant 0$, для всякой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям 1)—4), существует бесконечная треугольная матрица чисел $\{\xi_{i,j}\}$, $i=1, 2, 3 \ldots$; $j=1, \ldots, i$, которые удовлетворяют системе равенств*

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(\xi_{k,j})=\varphi(d_1), \tag{α_k}$$

$$\sum_{j=1}^{l-1} \varphi(\xi_{l-1,j}-\xi_{k,j})+\sum_{j=l}^{k} \varphi(\xi_{k,j})=\varphi(d_l), \quad l=2, 3, \ldots, k,$$

при всех натуральных значениях k.

Доказательство этого утверждения сводится к доказательству следующей основной леммы.

Лемма 1. *Какой бы ни была числовая последовательность* $d_\nu\downarrow$, $d_\nu\geqslant0$, *для всякой функции* $\varphi(t)$, *удовлетворяющей условиям* 1)—4), *при любом натуральном* n *существует одна и только одна вещественная неотрицательная матрица* $\{\xi_{i,j}\}$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,i$, *которая удовлетворяет системе уравнений* (α_k) *при всех* $k\leqslant n$. *Эта матрица для каждого* $n\geqslant2$ *обладает свойством*

$$\xi_{j+1,j}=\xi_{j+2,j}=\xi_{j+3,j}=\ldots=\xi_{n,j}\leqslant\xi_{j,j},\quad j=1,\ldots,n-1. \qquad (\beta_{nj})$$

Полагая $\varphi(t)=|t|^p$, $1\leqslant p<\infty$, получаем

Следствие. *Всякое счетное ультраметрическое пространство* $R(d;\ R)$ *допускает изометрическое отображение в пространство последовательностей* l_p, *каким бы ни было* $p\geqslant1$.

В случае, когда $p=1$ или $p=2$, может быть указан простой алгоритм для эффективного построения ультраметрической последовательности $A(d;\ l_p)$ по заданной числовой последовательности $\{d_\nu\}$.

5. Если при некотором значении n оказывается, что $d_i=0$ для $i>n$, ультраметрическое пространство $R(d;\ R)$ состоит из n точек и отображается изометрически в $(n-1)$-мерное эвклидово пространство.

Определив размерность $\dim R(d;R)$ ультраметрического пространства $R(d;R)$ как наименьшее значение n, при котором это пространство допускает изометрическое отображение в n-мерное эвклидово пространство, можно доказать следующее предложение.

Теорема 3. *Для всякого ультраметрического пространства* $R(d;\ R)$, *состоящего из конечного числа точек, справедливо равенство*

$$\dim R(d;\ R)=\operatorname{card}R-1.$$

В частном случае, когда $\rho(x,\ y)=1$ для любой пары различных точек $x,\ y\in R$, а $\rho(x,\ x)=0$, равенство теоремы 3 ранее было указано в ([9]), где аналогичным образом вводилось определение размерности конечного графа. Отметим, что в отличие от n-мерного эвклидова пространства, n-мерное пространство с метрикой l_1 или l_∞ уже содержит ультраметрические множества, состоящие более чем из $n+1$ точки. Доказательство теоремы 3 опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi(t)$ *такова, что в условии* 4) *для всех* $t',\ t''>0$ *имеет место знак строгого неравенства, то любое вещественное решение* $\{\xi_{i,j}\}$, $i=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,i$, *совокупности систем уравнений* (α_k), $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, *обладает свойствами*

$$\operatorname{sign}\xi_{\nu,j}=\operatorname{sign}\xi_{j,j},\quad j<\nu\leqslant k,$$
$$|\xi_{j+1,j}|=|\xi_{j+2,j}|=|\xi_{j+3,j}|=\ldots=|\xi_{\nu,j}|\leqslant|\xi_{j,j}|,\quad j<k.$$

Отметим, что равенство теоремы 3 справедливо и для других ультраметрических пространств.

Днепропетровский химико-технологический
институт им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
20 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Колмогоров*, ДАН, т. 108, № 3, 585 (1956). [2] *А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров*, УМН, т. 14, № 2, 3 (1959). [3] *А. Ф. Тиман*, Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. 2, Л., 1964, стр. 683. [4] *С. Б. Бабаджанов*, Поперечники компактов в банаховых пространствах, Диссертация, М., 1967. [5] *В. Я. Крейнович*, УМН, т. 29, № 5 (1974). [6] *Ж. Дьедонне*, Основы современного анализа, М., 1964. [7] *Ф. Хаусдорф*, Теория множеств, М., 1937. [8] *А. Вейль*, Основы теории чисел, М., 1972. [9] *P. Erdös, F. Harary, W. T. Tutte*, Mathematika, v. 12, Part. 2, № 24, 118 (1965).