Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 513.88 МАТЕМАТИКА

Е. Д. ГЛУСКИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ПОПЕРЕЧНИКАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1974)

1. Целью предлагаемой заметки является вычисление точного порядка поперечников $d_n(W_1^l, C)$, $l\geqslant 2$, а также оценки поперечников некоторых других компактов в пространстве $C=C[0,1]$. Напомним, что n-поперечником по А. Н. Колмогорову $d_n(K, \mathfrak{X})$ компакта K в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ называется величина (см. [1])

$$d_n(K,\mathfrak{X})=\inf_{L_n:\,\dim L_n=n}\ \max_{x\in K}\ \min_{y\in L_n}\|x-y\|_{\mathfrak{X}}.$$

Если K — единичный шар пространства Y, компактно вложенного в банахово пространство $\mathfrak{X}$, то будем писать $d_n(Y,\mathfrak{X})$ вместо $d_n(K,\mathfrak{X})$.

Одна из наиболее интересных проблем в теории поперечников — вычисление $d_n(Y,\mathfrak{X})$ в случае, когда метрики в $\mathfrak{X}$ и Y имеют различную функциональную природу. Характерной задачей такого рода является задача о вычислении $d_n(W_p^l, C)$, где W_p^l — пространство С. Л. Соболева. Этот вопрос был поставлен М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком в работе [2], в которой для соответствующих единичных шаров был найден точный порядок ε-энтропии. Затем М. З. Соломяк и В. М. Тихомиров [3] вычислили порядок убывания поперечников по И. М. Гельфанду единичного шара W_p^l в C при $p\geqslant 2$. В [3] было также указано на связь между задачей о вычислении $d_n(W_p^l, C)$ и некоторыми конечномерными задачами о поперечниках. Сильные результаты по указанной конечномерной задаче получили Р. С. Исмагилов [4] и В. С. Кашин [6]. Для перехода от этой задачи к оценкам поперечников функциональных классов Р. С. Исмагилов [4] предложил прием, с помощью которого им было показано, например, что *

$$d_n(W_1^2, C)\prec n^{-6/5}.$$

В настоящей работе предлагается другой, более точный способ сведения «функциональной» задачи к конечномерным. С помощью этого способа мы покажем, в частности, что

$$d_n(W_1^2,\ C)\asymp n^{-3/2}.$$

Таким образом, в этой задаче удалось вычислить точный порядок убывания поперечников. Что касается конечномерной задачи, то используемая нами оценка (лемма 1) по существу получена объединением результатов Р. С. Исмагилова и В. С. Кашина.

2. Пусть R^n — n-мерное пространство вещественных векторов $x=(x_1, x_2,\dots,x_n)$; $e_k^{(n)}$, $k=1,2,\dots,n$, — естественный базис в R^n. Через l_n^p обозначим банахово пространство, полученное введением в R^n нормы

$$\|x\|_{l_n^p}=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p},\ p<\infty;\quad \|x\|_{l_n^\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

* Мы пишем $a_n\prec b_n$, если $a_n=O(b_n)$, и $a_n\asymp b_n$, если $a_n\prec b_n$, $b_n\prec a_n$.

Пусть $B_n = \operatorname{conv}\{\pm f_1^{(n)}, \pm f_2^{(n)}, \ldots, \pm f_n^{(n)}\}$, $f_k^{(n)} = ke_1^{(n)} + (k-1)e_2^{(n)} + \ldots + e_k^{(n)}$.

Теорема 1.

$$d_m(B_n, l_n^\infty) < nm^{-3/2}.$$

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 1. *Равномерно по всем n и m*

$$d_m(l_n^1, l_n^\infty) = O(\sqrt{n}/m). \tag{1}$$

Доказательство. 1^0) Существует абсолютная константа c_1 такая, что в арифметической прогрессии $\{1+kl\}_{k=1}^\infty$ между x и $2x$ содержится число вида p^a (p простое, a целое), как только $l < \ln x$, $x > c_1$. Действительно, рассмотрим функцию

$$\Psi(x; q, a) = \sum_{n \leqslant x,\ n \equiv a \pmod q} \Lambda(n),$$

где $\Lambda(n) = \ln p$, если n — степень простого числа p, и $\Lambda(n) = 0$ для остальных n. Известна формула ([8], стр. 145)

$$\Psi(x; q, a) = x/\varphi(q) + O\{x \exp[-c(\ln x)^{1/2}]\} \tag{2}$$

равномерно по $q \leqslant \ln x$ (в (2) $\varphi(q)$ — функция Эйлера). Отсюда следует существование абсолютной постоянной c_1 такой, что $\Psi(2x; l, 1) - \Psi(x; l, 1) > 0$, как только $x > c_1$, $\ln x > l$. Это доказывает нужное предложение.

2^0) В. С. Кашиным ([6]) доказано, что $d_m(l_n^1, l_n^\infty) \leqslant 2(m^{-1}\ln n)^{1/2}$. При $m \leqslant 4n(\ln n)^{-1}$ имеем $(m^{-1}\ln n)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{n}m^{-1}$ и, следовательно, для доказательства леммы достаточно считать $m > 4n(\ln n)^{-1}$.

3^0) Пусть $n > c_1$, $m > 4n(\ln n)^{-1}$. Если положить $l = [2n/m] + 1$, а $x = ml/2 > n$, то из 1^0) следует, что существуют простое p и целое a такие, что $n \leqslant n_1 = p^a \leqslant 8n$ и $n_1 - 1$ делится по крайней мере на одно из чисел $m_0 = [m/2]$, $m_0+1, \ldots, 2m_0-1$. Обозначим соответствующий делитель через m_1.

4^0) Теперь требуемая оценка получается из оценки Р. С. Исмагилова ([4])

$$d_m(l_n^1, l_n^\infty) \leqslant d_{m_1}(l_{n_1}^1, l_{n_1}^\infty) \leqslant \sqrt{n_1}/m_1 \leqslant 6\sqrt{n}/m.$$

Лемма 2.

$$d_{m+s}(B_{2n}, l_{2n}^\infty) \leqslant 2d_m(B_n, l_n^\infty) + d_s(l_{2n}^1, l_{2n}^\infty). \tag{3}$$

Доказательство. Введем оператор T: $l_n^\infty \to l_{2n}^\infty$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2x_1, x_1+x_2, 2x_2, \ldots, x_{n-1}+x_n, 2x_n, x_n)$. Ясно, что $\|T\| = 2$. По определению поперечника существуют $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in l_n^\infty$ такие, что

$$\dim \mathscr{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \leqslant m, \quad \|f_i^{(n)} - \varphi_i\| \leqslant d_m(B_n, l_n^\infty),$$

и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n} \in l_{2n}^\infty$ такие, что

$$\dim \mathscr{L}\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}\} \leqslant s, \quad \|e_i^{(2n)} - \psi_i\| \leqslant d_s(l_{2n}^1, l_{2n}^\infty).$$

Рассмотрим плоскость $L = \mathscr{L}\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}, T\varphi_1, T\varphi_2, \ldots, T\varphi_n\}$. Ясно, что $\dim L \leqslant m+s$.

Так как $f_{2k}^{(2n)} = Tf_k^{(n)}$, то

$$\|f_{2k}^{(2n)} - T\varphi_k\| \leqslant \|T\| \, \|f_k^{(n)} - \varphi_k\| \leqslant 2d_m(B_n, l_n^\infty). \tag{4}$$

Заметим, что $2f_{2k-1}^{(2n)} = f_{2k}^{(2n)} + f_{2k-2}^{(2n)} - e_{2k}^{(2n)}$, $f_0^{(2n)} = 0$.

Положим $\theta_k = \frac{1}{2}(T\varphi_k + T\varphi_{k-1} - \psi_k) \in L$, тогда

$$\|f_{2k-1}^{(2n)} - \theta_k\| \leqslant 2d_m(B_n, l_n^\infty) + \tfrac{1}{2} d_s(l_{2n}^1, l_{2n}^\infty). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует (2).

Доказательство теоремы 1. Итерируя (2) и используя (1), получаем

$$d_{m+\sum\limits_{i=1}^{k} s_i}(B_{2^k m},\ l^\infty_{2^k m}) \leqslant 2^k \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} d_{s_i}(l^1_{2^i m},\ l^\infty_{2^i m}) +$$

$$+\ 2^k d_m(B_m,\ l^\infty_m) \leqslant 2^k m^{1/2} \sum_{i=1}^{k} 2^{-i/2} s_i^{-1}. \tag{6}$$

Полагая в (6) $s_i=[2^{-i/4}m]$ и выбирая k из соотношений $n/m\leqslant 2^k<2n/m$, получим

$$d_{m(1+c_2)}(B_{c_3 n},\ l^\infty_{c_3 n}) \leqslant c_4 n m^{-3/2}.$$

3. Через $W_p^\alpha=W_p^\alpha[0, 1]$ ниже обозначаются классы С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого.

Теорема 2.

$$d_m(W_1^l,\ C[0,\ 1]) \asymp m^{1/2-l}, \quad l\geqslant 2. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $d_m(W_1^l,\ L_2)\asymp m^{1/2-l}$ (см. [5]), то $d_m(W_1^l,\ C)\prec m^{1/2-l}$. Поскольку $d_m(C^\alpha,\ C[0,\ 1])\asymp m^{-\alpha}$ (см. [1]), достаточно доказать, что

$$d_m(W_1^2,\ C)\prec m^{-3/2}.$$

Рассмотрим систему функций $u_t(x)=(x-t)_+$. Известно [4], что $d_{m+2}(W_1^2,\ C)\leqslant d_m(\mathrm{conv}\{\pm u_t\},\ C)$. Пусть $m^{3/2}\leqslant n<2m^{3/2}$, K_n — пространство функций v, определенных на множестве точек $\{i/n;\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ v(0)=0\}$ с нормой $\max\limits_i|v(i/n)|$; отождествим его с l_n^∞. Через $\mathscr{L}_m$ обозначим m-мерное экстремальное подпространство для B_n. Таким образом, $\rho(B_n,\ \mathscr{L}_m)=$ $=d_m(B_n,\ l_n^\infty)\leqslant c$ (согласно теореме 1).

Продолжим каждую функцию $v\in\mathscr{L}_m$ с множества $\{i/n\}_{i=0}^n$ до функции, линейной и непрерывной на каждом отрезке $[(i-1)/n,\ i/n]$. Полученное подпространство обозначим через L_m. Ясно, что $\dim L_m=m$. Фиксируем $t\in[0,\ 1]$. Рассмотрим $t_1=i/n$ такое, что $(i-1)/n\leqslant t\leqslant i/n$. Ясно, что $\|u_t-$ $-u_{t_1}\|\leqslant n^{-1}\leqslant m^{-3/2}$. Так как $n\tilde{u}_{t_1}=nu_{t_1}|_{\{i/n;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}}\in B_n$, то

$$\rho(u_{t_1},\ L_m)=\rho(\tilde{u}_{t_1},\ \mathscr{L}_m)\leqslant n^{-1}d_m(B_n,\ l_n^\infty)\leqslant cm^{-3/2}.$$

Окончательно

$$\rho(u_t,\ L_m)\leqslant\|u_t-u_{t_1}\|+\rho(u_{t_1},\ L_m)\prec m^{-3/2}.$$

Теорема доказана.

Формула (7), по-видимому, справедлива и при $1<l\leqslant 2$.

Изложенным выше методом нетрудно получить несколько худший результат

$$d_m(W_1^\alpha,\ C)\prec m^{1/2-\alpha+\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Для классов О. В. Бесова $B_{p,q}^\alpha$, $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, оценка поперечников сверху может быть получена с помощью линейной интерполяции (см. [7]).

Следствие.

$$d_m(B_{p,q}^{\alpha},C)\prec m^{1/2p-\alpha}, \quad p\alpha>2, \quad 1\leqslant p<\infty, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty. \tag{8}$$

Действительно, согласно [7],

$$d_m((W_1^\beta,W_1^2)_{\theta,q},C)\prec d_m^\theta(W_1^\beta,C)\,d_m^{1-\theta}(W_1^2,C),$$

откуда получается нужный результат для $p=1$, и

$$d_m((B_{1,q}^{\beta}, C)_{\theta,q}, C) < d_m^{\theta}(B_{1,q}^{\beta}, C)\, d_m^{1-\theta}(C, C),$$

что при $\theta=p^{-1}$, $\beta=\alpha p$ дает требуемый результат для $p>1$. По-видимому, формула (8) дает точный порядок убывания величин $d_m(B_{p,q}^{\alpha}, C)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность М. З. Соломяку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Примечание при корректуре. Приводимое доказательство леммы 1 основано на предварительном варианте статьи ([4]), любезно предоставленном мне Р. С. Исмагиловым до опубликования. В окончательном варианте статьи ([4]) оценка (1) получена в полном объеме, так что наше доказательство излишне.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
15 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. М. Тихомиров*, УМН, т. 15, в. 3, 81 (1960). [2] *М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк*, Матем. сб., т. 73 (115), 3, 331 (1967). [3] *М. З. Соломяк, В. М. Тихомиров*, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 10, 76 (1967). [4] *Р. С. Исмагилов*, УМН, т. 29, в. 3 (1974). [5] *Р. С. Исмагилов*, Функц. анализ, т. 2, в. 2, 32 (1968). [6] *В. С. Кашин*, ДАН, т. 214, № 5, 1024 (1974). [7] *H. Triebel*, interpolationtheorie in Banachräumen, Jena, 1973. [8] *Г. Дэвенпорт*, Мультипликативная теория чисел, «Наука», 1971.