Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 513.628.2 МАТЕМАТИКА

Б. А. ДУБРОВИН, член-корреспондент АН СССР С. П. НОВИКОВ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА И ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ. ИХ СВЯЗЬ С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

1. Задача Коши для известного в теории нелинейных волн уравнения Кортевега — де Фриза (КФ) $u_t=6uu_x-u_{xxx}$, как выяснено в замечательной работе ([4]), тесно связана с изучением спектральных свойств оператора Штурма — Лиувилля $L\psi=E\psi$, где $L=-d^2/dx^2+u(x)$. Для быстроубывающих начальных условий $u(x, 0)$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)(1+|x|)dx<\infty$, уравнение КФ в некотором смысле полностью решается переходом к данным рассеяния для оператора L, которые определяют потенциал u, как показано в известных работах ([3], [8], [10]). Позднее в работе ([7]) было указано, что в основе этой процедуры фактически лежит представление оператора умножения на правую часть уравнения КФ через коммутатор $[A, L]=(6uu_x-u_{xxx})$, где $A=-4d^3/dx^3+3(u\, d/dx+(d/dx)u)$. Из этого следует эквивалентность уравнения КФ уравнению $\dot{L}=[A, L]$.

Для периодических по x функций $u(x, t)$ и тем более для условно периодических связь оператора L с уравнением КФ не удавалось всерьез использовать. В последнее время в работах авторов ([2], [9]) эти задачи были существенно продвинуты и обнаружены глубокие связи с алгебраической геометрией. Следует отметить, что существенная часть результатов работы Дубровина ([2]) было одновременно и независимо получена Матвеевым и Итсом ([6]). Обе работы ([2], [6]) использовали идею Н. И. Ахиезера ([1]), смысл которой полноценно раскрыт лишь сейчас.

2. Конечнозонные потенциалы и высшие аналоги уравнения КФ (см. ([9])). Для периодического потенциала $u(x)$, как обычно, собственные функции оператора L на всей прямой определяются условиями:

1) $L\psi(x, x_0, E)=E\psi(x, x_0, E)$;
2) $\psi(x, x_0, E)=1, \quad x=x_0$;
3) $\psi_\pm(x+T, x_0, E)=e^{\pm ip(E)}\psi(x, x_0, E)$,

где $\psi_-=\bar{\psi}_+$, T — период, $p(E)$ — действительная функция, определенная не для всех E. Области определения функции $p(E)$ называются разрешенными зонами, а дополнение к ним — запрещенными зонами, или лакунами, которых, как правило, бесконечное число (их длины убывают при $E\to\infty$).

а) Конечнозонным называется потенциал u, для которого в спектре оператора L имеется лишь конечное число лакун (например, $u=\mathrm{const}$).

в) Высшим уравнением КФ называется такое уравнение $\dot{u}=Q(u, u', \ldots, u^{(N)})$, для которого существует оператор $A=d^N/dx^N+\sum\limits_{i=1}^{N}P_i\cdot d^{N-i}/dx^{N-i}$ такой, что коммутатор $[A, L]$ есть оператор умножения на правую часть $Q(u, u', \ldots, u^{(N)})$. Здесь Q и все P_i считаются полиномами от функции u и ее производных по x с постоянными (вещественными) коэффициентами).

Известно [7] такое описание высших уравнений КФ: если $\chi(x, E)= =-i\,d\ln\psi/dx$, то при $E\to\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$\chi\sim k+\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi_n(x)}{(2k)^n},\quad -i\chi'+\chi^2+u=E,\quad k^2=E;$$

все $\chi_n(x)$ являются полиномами от u, $\acute{u}$, $\acute{\acute{u}}$, ..., причем интегралы

$$I_m=\int_{x_0}^{x_0+T}\chi_{2m+1}(x)\,dx$$

таковы, что $\dot{I}_m=0$ в силу исходного и всех высших уравнений КФ. Все высшие уравнения КФ имеют вид

$$\dot{u}=\frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta u(x)}\left(\sum_{q=1}^{m+2}c_qI_q\right).$$

Основная теорема работы [9] утверждает, что все стационарные периодические решения $u(x)$ любого из высших уравнений КФ являются конечнозонными потенциалами. Кроме того, все уравнения $\frac{\delta}{\delta u(x)}\left(\sum c_qI_q\right)= =\text{const}$ оказываются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. Метод работы [9] дает алгоритм вычисления полного набора коммутирующих интегралов J_1, ..., J_m, которые являются полиномами от u, $\acute{u}$, ..., $u^{(2m-1)}$, где m — число лакун. Найденная совокупность потенциалов оказывается инвариантной относительно всех высших уравнений КФ и заполняет $(m+1)$-мерное семейство эвклидовых пространств R^{2m} (или пространство R^{3m+1}), зависящих от набора констант $\{c_q\}$. В каждом $R^{2m}_{\{c_q\}}$ действует коммутативная группа R^m, орбиты которой выделяются набором интегралов (полиномов) J_1, ..., J_m. Если орбита компактна (тор) и числа вращения соизмеримы, то обмотка этого тора дает периодический m-зонный потенциал. Вообще говоря, получатся мероморфные периодические потенциалы $u(x)$ с группой (вещественных и мнимых) периодов T_1, ..., T_m, T_1', ..., T_m'. Вся конструкция допускает очевидную комплексификацию, и комплексные орбиты группы C^m являются абелевыми многообразиями.

3. Конечнозонные потенциалы и алгебраическая геометрия (см. [2]). Оказывается, что для периодического потенциала собственная функция $\psi(x, x_0, E)$ аналитически продолжается по E до мероморфной функции на римановой поверхности R (кроме $E=\infty$), имеющей вид $y^2=\prod_{j=1}^{2m+1}(E-E_j)$, где E_j — границы зон. В условно-периодическом случае это требование, налагаемое на изучаемый класс потенциалов. Если $\chi(x, E)=-id\ln\psi/dx$, то $\chi=\chi_R+i\chi_I$, где $\chi_I=+{}^1/_2\,\frac{d}{dx}(\ln\chi_R)'$.

Отсюда следует, что

$$\psi(x,x_0,E)=\sqrt{\frac{\chi_R(x_0,E)}{\chi_R(x,E)}}\exp\left\{i\int_{x_0}^{x}\chi_R\,dx\right\}.$$

Доказывается важная формула:

$$\chi_R(x,E)=\sqrt{R(E)}\Big/\prod_{j=1}(E-\gamma_j(x)),$$

где $R(E)=\prod_{i=1}^{2m+1}(E-E_i)$, $\gamma_j(x)$ лежат по одному в запрещенных зонах или на их границах. Пусть $C(x, x_0, E)$ и $S(x, x_0, E)$ — базис собственных функций, нормированный при $x=x_0$ условиями

$$C=1,\quad C'=0,\quad S=0,\quad S'=1.$$

Из общей формулы $\psi=C+i\chi(x_0, E)S$ видно, что полюса ψ лежат над точками $\gamma_j(x_0)$. Однако полюс ψ лежит только на одном из листов. Условие его сокращения на другом месте дает уравнение

$$\left[\prod_{j=1}^{m}(E-\gamma_j(x))\right]'_{E=\gamma_j(x)}=2i\sqrt{R(\gamma_j)}$$

или

$$\gamma_j'=2i\sqrt{R(\gamma_j)}\Big/\prod_{j\neq k}(\gamma_j-\gamma_k).$$

Сопоставление с результатами [9] дает возможность вычислить зависимость от времени $\dot\gamma_j$ в силу высших уравнений КФ. В частности, для исходного уравнения КФ получается [2]

$$\dot\gamma_j=8i\left(\sum_{k\neq j}\gamma_k-c\right)\sqrt{R(\gamma_j)}\Big/\prod_{j\neq k}(\gamma_j-\gamma_k),$$

где $c={}^1/_2\sum E_i$. Здесь $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — набор точек (дивизор) на R, $u(x)=-2\sum\gamma_j(x)+\sum E_i$.

Замена (отображение) Абеля интегрирует эти уравнения

$$\xi_k=\sum_{j=1}^{m}\int_{Q}^{\gamma_j(x)}\omega_k,\quad \text{где } \omega_k=\frac{E^k\,dE}{\sqrt{R(E)}},\quad k=0,\ldots,m-1,$$

базис голоморфных дифференциалов на R. Все производные ξ в силу высших КФ постоянны. Параметры ξ_k определены с точностью до периодов форм ω_k по циклам и определяют тор $J(R)$ — «якобиан», прямолинейная структура на котором дается высшими уравнениями КФ. Само множество потенциалов с заданными границами зон изоморфно (после комплексификации) этому многообразию Якоби (комплексному тору).

Легко видеть, что $p(E)=\int\chi_R\,dx$, где $\psi(x+T)=e^{ip(E)}\psi(x)$. Имеет место общая формула $\delta p/\delta u(x)=1/(2\chi_R)$. Из вида функции χ_R и этого тождества следует теорема, обратная к п. 2: любой конечнозонный потенциал есть стационарное решение одного из высших уравнений КФ. Результаты п.п. 2 и 3 позволяют полностью проинтегрировать уравнение КФ с «конечнозонными» начальными условиями $u(x, 0)$ (периодическими и условно периодическими). Как показано в [9], эти решения есть аналог многосолитонных решений уравнения КФ. Хотя результаты п. 3 легко обобщаются на случай бесконечного числа зон, здесь уже теряется аналитическая эффективность в приложении к теории уравнения КФ. По-видимому, любой гладкий периодический потенциал аппроксимируется конечнозонным. Этот вопрос полезно было бы выяснить.

В следующем пункте мы покажем, что сопоставление результатов п.п. 2 и 3 позволяет установить нетривиальные факты в теории абелевых многообразий.

4. Полное многообразие модулей гиперэллиптических якобианов $J(R)$. Над многообразием модулей гиперэллиптических кривых V над полем комплексных чисел имеется естественное рас-

слоение $M\mapsto V$, слоем которого является многообразие Якоби соответствующей кривой. Для рода 2 оно совпадает с полным многообразием модулей всех (с точностью до изогении) двумерных абелевых многообразий (кроме прямых произведений одномерных). Каково многообразие M? Мы рассмотрим $(2g+2)$-листное накрытие $\widetilde{M}$ над этим многообразием модулей, связанное с фиксацией одной из $2g+2$ точек ветвления, которая считается бесконечно удаленной. Это влечет выделение точки второго порядка на якобиане J. Имеет место следующая

Теорема. *Полное многообразие модулей $\widetilde{M}$ гиперэллиптических якобианов $J(R)$ с отмеченной точкой второго порядка рационально.*

Доказательство этой теоремы вытекает из сопоставления результатов п.п. 2 и 3. Действительно, совокупность всех условно-периодических конечнозонных потенциалов с заданными границами зон E_i (пусть $\sum_{i=1}^{2n+1} E_i=$ $=0$) есть после комплексификации якобиан $J(R)$, см. п. 3. С другой стороны, те же самые многообразия, согласно п. 2, расслаивают пространство C^{3n} (если исключить бесконечно удаленные точки). Фактически мы имеем n-мерное семейство расслоений пространств $C^{2n}_{\{c_q\}}$ с помощью набора из n полиномов $J_1, \ldots, J_n$, зависящих от оставшихся координат $\{c_q\}$ в C^{3n} как от параметров. Для $n=2$ эти полиномы имеют вид (см. [9])

$$J_1=p_1p_2-{}^1\!/_2(q_2^2+5q_1^2q_2+{}^5\!/_4q_1^4)+8c_2q_1^2-c_1q_1,$$

$$J_2=p_1^2-2q_1p_1p_2+(2q_2-16c_2)p_2^2+q_2^5+16c_2q_1^3+$$
$$+c_1q_1^2+32c_2q_1q_2-2c_1q_2,$$

а риманова поверхность R определяется уравнением

$$y^2=E^5+2c_2E^3-\frac{c_1}{16}E^2+\frac{J_1+32c_2^2}{32}E+\frac{J_2+16c_1c_2}{16^2},$$

где p_1, p_2, q_1, q_2 — координаты в C^4 и c_1, c_2 — лишние координаты в C^6.

Группа C^2 действует (локально) с помощью пары гамильтоновых систем

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial J_\alpha}{\partial q_j},\quad \dot{q}_j=\frac{\partial J_\alpha}{\partial p_j},\quad \alpha=1,2,\quad j=1,2.$$

Изоморфные кривые получатся, если умножить весь набор (E_i) на число, что не нарушает рациональности. После этого останется всего $2g+2$ изоморфных кривых, связанных с выделением одной из точек ветвления (бесконечно удаленной).

В заключение отметим, что гиперэллиптичность связана с порядком оператора L. Сейчас известны и операторы более высокого порядка (см. [5]), к которым применимы такие же методы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Ахиезер*, ДАН, т. 141, № 2, 263 (1961). [2] *Б. А. Дубровин*, Функциональн. анализ, т. 8, № 4 (1974). [3] *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, 309 (1951). [4] *C. Gardner, J. Green et al.*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095 (1967). [5] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат*, Функциональн. анализ, т. 8, № 3 (1974). [6] *А. Р. Итс, В. Б. Матвеев*, Там же, т. 8, № 4 (1974). [7] *P. Lax*, Comm. Pure Appl. Math., v. 21, № 2, 467 (1968). [8] *В. А. Марченко*, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 1, 327 (1952). [9] *С. П. Новиков*, Функциональн. анализ, т. 8, № 3 (1974). [10] *Л. Д. Фадеев*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 73, 314 (1964).