

Н. В. ЗМИТРЕНКО, С. П. КУРДЮМОВ

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ СТРУКТУР ПРИ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ  
СЖАТИЯ ПЛАЗМЫ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 16 IV 1974)

В работе изучается новый класс автомодельных решений для задачи сжатия конечной массы плазмы поршнем с заданными на нем гидродинамическим и тепловым режимами. Плазма описывается одномерными уравнениями гидродинамики с учетом отрыва температур, ряда диссипативных процессов, объемных стоков и источников тепла. Рассматриваются случаи плоской ( $N=0$ ) осевой ( $N=1$ ) и центральной ( $N=2$ ) симметрии. Автомодельные решения для разлета конечной массы были построены в (1-5), для сжатия в (6, 7). В настоящей работе рассмотрены возможные виды решения автомодельной задачи сжатия конечной массы.

В установленном автомодельном режиме сжатие плазмы не сопровождается распространением по массе ударных, тепловых и других волн конечной амплитуды и в этом смысле является оптимальным (8). Решения, рассмотренные в настоящей работе, содержат структуры — немонотонности профилей ряда величин, например температуры, — возникающие на развитой нелинейной стадии перегретой неустойчивости. Последняя анализировалась в линейном приближении в (9), возникновение структур исследовалось в стационарных задачах и в численном эксперименте (10, 11, 4, 12-14). В настоящей работе показана возможность существования в плазме самоподдерживающихся структур при автомодельном режиме ее сжатия.

1°. Постановка задачи. Система уравнений для рассматриваемой задачи, граничные и начальные условия, а также условия автомодельности приведены в (7). В настоящей статье используются те же обозначения, что и в (7). При выполнении указанных в (7) условий автомодельности все искомые функции представляются в виде комбинаций размерных параметров  $v_0, M_0, R$ , времени  $t$  и безразмерных функций от одной автомодельной переменной  $s=x/M_0$ :

$$\begin{aligned}
 r &= \lambda(s) v_0 t^n; & v &= \alpha(s) \frac{v_0 t^n}{t}; & \rho &= \frac{M_0 \delta(s)}{(v_0 t^n)^{N+1}}; & p &= \frac{M_0 \beta(s)}{t^2 (v_0 t^n)^{N-1}}; \\
 T_{i,e} &= \frac{(v_0 t^n)^2 \theta_{i,e}(s)}{R t^2}; & \Omega_{i,e} &= \frac{M_0 \omega_{i,e}(s)}{t^3 (v_0 t^n)^{N-2}}; & Q &= \frac{M_0 q(s)}{t^3 (v_0 t^n)^{N-1}}; \\
 W_{i,e} &= \frac{M_0 w_{i,e}(s)}{t^3 (v_0 t^n)^{N-1}}; & W_R &= \frac{M_0 w_R(s)}{t^3 (v_0 t^n)^{N-1}}; & \Phi &= \frac{M_0 \varphi(s)}{t^3 (v_0 t^n)^{N-1}}; \\
 z_{i,e} &= \frac{M_0 R \tilde{z}_{i,e}(s)}{t (v_0 t^n)^{N-1}}; & \eta &= \frac{M_0 \eta(s)}{t (v_0 t^n)^{N-1}}; & \xi &= \frac{M_0 \tilde{\xi}(s)}{t (v_0 t^n)^{N-1}}; \\
 D &= \frac{M_0 \tau(s)}{t^2 (v_0 t^n)^{N-1}}; & D' &= \frac{M_0 \tau'(s)}{t^2 (v_0 t^n)^{N-1}}; & \tilde{\xi} &= \frac{M_0 R \tilde{\xi}(s)}{t (v_0 t^n)^{N+1}}; \\
 \Sigma &= M_0^{1-\gamma} v_0^{2/n} t^{2(n/n, -1)} \sigma(s); & n &= \frac{2}{2+(N+1)(\gamma-1)}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Изменение всех величин со временем задано формулами (1). Поведение их по пространству дается функциями  $\lambda(s)$ ,  $\alpha(s)$ ,  $\delta(s)$  и т. д., определяемыми при решении системы безразмерных уравнений, которую можно получить в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= n\lambda; \quad n(1-n)\delta\lambda = \frac{d}{d\lambda}(\beta-\tau); \quad n_\tau = \frac{2(n-n_*)}{n_*(\gamma-1)}; \\ n_\tau\beta_i &= -\frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^N \omega_i) + \varphi + w_i - q; \quad \omega_i = -\tilde{\kappa}_i \frac{d\theta_i}{d\lambda}; \\ n_\tau\beta_e &= -\frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^N \omega_e) + w_e - w_R + q; \quad \omega_e = -\tilde{\kappa}_e \frac{d\theta_e}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (2)$$

В работе (7) были введены константы  $a_i$  в коэффициентах переноса.

Безразмерные константы  $A_i$ , соответствующие  $a_i$ , имеют вид:  $A_i = a_i / (v_0^{k_i(N+1)-2m_i+1-N} M_0^{1-k_i} R^{1+m_i})$  и т. д. Граничные условия в центре при  $\lambda=0$ :  $\alpha=0$ ,  $\omega_{i,e}=0$ ; на поршне при  $\lambda=\lambda_\pi$ :  $\theta_{i,e}=\theta_{\pi i,e}$  или  $\omega_{i,e}=\omega_{\pi i,e}$ ,  $\alpha=\alpha_\pi=n\lambda_\pi$  или  $\beta-\tau=0$ , в последнем случае  $\lambda_\pi$  определится из условия  $\int_0^{\lambda_\pi} \delta\lambda^N d\lambda = 1$ .

Как указано в (6, 7), в автомодельных режимах сжатия  $-\infty < t < 0$ . При этом считаем  $v_0 t^n > 0$ , поэтому  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_e$  положительны, а  $\tilde{\kappa}_{i,e}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $\varphi$ ,  $w_{i,e}$ ,  $w_R$ , а также скорость  $v$  отрицательны при любом  $n$ . Это приводит к тому, что в автомодельной задаче сжатия  $A_i < 0$ ,  $i=8, 9$  (в задаче разрежения все  $A_i > 0$ ).

2°. Остановившиеся волны. Решения (1) являются частным случаем более общего класса решений, в котором автомодельная переменная  $s$  зависит и от временной координаты:  $s=x/(A_0 t^{n_0})$ . В таких режимах фронты ударных или тепловых волн распространяются по закону  $x_\Phi = s_\Phi A_0 t^{n_0}$ . Случай разделения переменных соответствует условию  $n_0=0$ , т. е. остановке фронта волны. Впервые решение с остановившимся фронтом было получено для задачи о проникновении тепла в среду с нелинейной теплопроводностью в (15). В рассматриваемой задаче, как и в (15), существует определенная «скиновая» глубина проникновения тепла в среду, не зависящая от времени. В самом деле, глубину проникновения по массе можно оценить как  $\Delta x \approx \left[ \frac{(\gamma-1)}{R} \kappa_\pi |t| \right]^{1/2}$ , где  $\kappa_\pi$  — массовый (лагранжев) коэффициент теплопроводности. Из вида (1) находим, что  $\kappa_\pi = \rho r^{2N} \kappa$ , используя (1), имеем  $\Delta x \approx M_0 [(\gamma-1) \delta \lambda^{2N} |\tilde{\kappa}|]^{1/2} \sim \text{const}$ .

3°. Возможные виды решения. Из формул (1) и системы (2) можно сделать определенные выводы о поведении искомых функций по  $\lambda$  или  $s$ .

1) Безразмерная скорость  $\alpha$  положительна для автомодельных задач сжатия и разрежения и всегда линейно растет с  $\lambda$ . Знак размерной скорости определяется знаком времени:  $v = nr/t$ ,  $n > 0$ .

2) В идеальном газе энтропия единицы массы  $S = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{\Sigma}{\Sigma_0}$ , где

$$\Sigma = \rho r^{-\gamma}, \quad \text{а } \Sigma_0 \text{ — размерная постоянная. Из (1) следует, что } \frac{dS}{dt} = \frac{R}{\gamma-1} \left( \frac{n}{n_*} - 1 \right) \frac{2}{t}. \text{ В автомодельных режимах сжатия } (-\infty < t < 0) \text{ энтро-}$$

ния убывает при  $n > n_*$  и возрастает при  $n < n_*$ . В режимах расширения ( $0 < t < \infty$ ) энтропия убывает при  $n < n_*$  и возрастает при  $n > n_*$ . При  $n = n_*$  энтропия неизменна со временем.

3) Из (2) следует, что если в однотемпературной плазме отсутствуют теплопроводность, вязкость, источники и стоки тепла, то автомодельное решение существует только при  $n = n_*$ .

4) Если в однотемпературной среде отсутствует теплопроводность, но есть хотя бы один источник тепла или диссипативный процесс, то энтропия массы растет. В этом случае автомодельное решение существует только при  $n < n_*$  для сжатия и при  $n > n_*$  для расширения.

5) Если в однотемпературной среде учитывается только теплопроводность, то при  $n > n_*$  для сжатия и при  $n < n_*$  для расширения профиль температуры — падающий от центра к поршню. Теплоотвод через поршень обеспечивает убывание энтропии массы. При  $n = n_*$  температура постоянно по пространству, энтропия неизменна во времени. В тех случаях, когда энтропия растет ( $n < n_*$  для сжатия,  $n > n_*$  для разрежения), необходимо, чтобы тепловой поток  $\Omega$  был направлен от поршня внутрь. Профиль температуры — растущий от центра к поршню.

6) В случае присутствия в однотемпературной среде теплопроводности и каких-либо объемных источников тепла (энерговыведение или от диссипативных процессов) в определенных случаях в автомодельных решениях возможно появление немонотонного профиля температуры. Анализ уравнений (2) показывает, что в режимах невозрастания энтропии ( $n \geq n_*$  для сжатия,  $n \leq n_*$  для разрежения) профиль температуры монотонный и падающий от центра к поршню. В режимах с ростом энтропии ( $n < n_*$  для сжатия,  $n > n_*$  для разрежения), где  $\text{sgn } n_{\gamma} = \text{sgn } w = \text{sgn } \varphi = \text{sgn } \chi$ , необходимые и достаточные условия существования в точке  $\lambda_{\tau}$  из  $0 < \lambda_{\tau} < \lambda_{\Pi}$  максимума температуры  $\theta$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{-1}(\lambda_{\tau}) [n_{\gamma} \beta(\lambda_{\tau}) - \varphi(\lambda_{\tau}) - w(\lambda_{\tau})] < 0, \\ \int_0^{\lambda_{\tau}} (n_{\gamma} \beta - \varphi - w) \lambda^N d\lambda = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

здесь через  $w$  обозначены либо  $w_1$ , либо  $w_e$ . При недостаточной мощности источников всюду профиль температуры растет от центра к поршню, как и в их отсутствие (см. п. 5)). Напротив, при слишком мощных источниках профиль будет всюду падающим от центра к поршню.

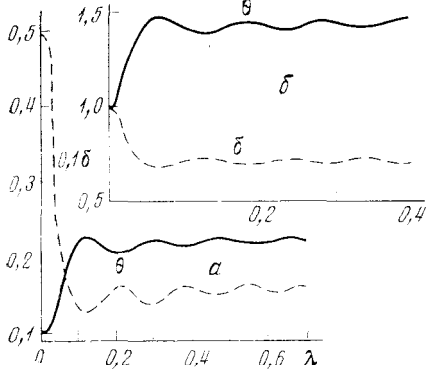


Рис. 1

7) Объемное излучение является стоком тепла. Автомодельное решение для теплопроводной среды в присутствии объемного излучения может иметь немонотонный профиль температуры в режимах убывания энтропии. Недостающий сток тепла вместо теплопроводности может обеспечить излучение. Пример такого решения приводится ниже. В режимах с возрастанием энтропии учет объемного излучения эффективно снижает мощность тепловых источников.

Соотношения (3) справедливы, если под  $w$  понимать сумму  $w_1$  либо  $w_e$  с  $-w_R$ .

8) Если среда двухтемпературна, то обмен энергией между температурами для компоненты с более высокой температурой является стоком, а для другой — источником тепла. Поэтому к первой применимы выво-

ды п. 7) относительно излучения, а ко второй — п. 6) относительно источников тепла.

4°. Некоторые численные решения системы (2). На рис. 1а приведен результат численного решения системы (2) для однотемпературной вязкой и теплопроводной среды; изображены профили безразмерных плотности  $\delta$  и температуры  $\theta$  по безразмерной эйлеровой координате  $\lambda=r/(v_0 t^n)$ . Параметры расчета:  $n=2/3$ ,  $N=2$ ,  $\gamma=1, 2$ , следовательно,  $n_*=10/13 > n$  и сжатие происходит с возрастанием энтропии. Безразмерная координата поршня  $\lambda_n=0,7$ , безразмерная сжимаемая масса

$$s_n = \int_0^{\lambda_n} \delta \lambda^N d\lambda = 0,17. \quad \text{Коэффициенты теплопроводности } \kappa = 10v_0^{-6} M_0 R^{7/2} T^{5/2}$$

и второй вязкости  $\xi = 5v_0^{-6} M_0 R^{5/2} T^{5/2}$ . Максимумы температуры вызваны действием вязкого нагрева. Результат численного решения системы (2) для случая сжатия однотемпературной среды с учетом объемного излучения представлен на рис. 1б. Параметры расчета:  $N=2$ ,  $n=2/3$ ,  $\gamma=5/3$ , следовательно,  $n_*=1/2 < n$  и сжатие происходит в режиме убывания энтропии. Далее,  $\lambda_n=0,4$  и  $s_n=0,01511$ . Коэффициент теплопроводности  $\kappa=0,0001 \cdot v_0^{-6} M_0 R^{7/2} T^{5/2}$ , а член, моделирующий объемное излучение,  $W_R = 1,5v_0^3 M_0^{-2/3} R^{1/2} \rho^{5/2}$ . Наличие максимумов плотности и минимумов температуры вызвано объемным стоком энергии.

Институт прикладной математики  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
12 IV 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. Е. Неуважаев, ПММ, т. 30, 1015 (1966). <sup>2</sup> И. В. Немчинов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1, 17 (1967). <sup>3</sup> П. П. Волосевич, В. С. Соколов, Магнитн. гидродин., т. 1, 43 (1967). <sup>4</sup> А. Н. Тихонов, А. А. Самарский и др., Эффект Т-слоя в магнитной гидродинамике, М., 1969. <sup>5</sup> П. П. Волосевич, С. П. Курдюмов и др., Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 10, № 6, 1447 (1970). <sup>6</sup> Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, Препринт ИИМ АН СССР, № 16, 1973; № 19, 1974. <sup>7</sup> Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, ДАН, 218, № 6 (1974). <sup>8</sup> J. Nuckolls, L. Wood et al., Nature, v. 239, № 5368, 139 (1972). <sup>9</sup> Ю. В. Саночкин, Магнитн. гидродин., т. 3, 61 (1965). <sup>10</sup> Н. Н. Комаров, И. Ф. Кварцхава, В. М. Фадеев, Ядерн. синтез, т. 5, 192 (1965). <sup>11</sup> А. А. Самарский, П. П. Волосевич и др., Сб.: Тепло и массоперенос, т. 8, Минск, 1972, стр. 3. <sup>12</sup> В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник, Сб.: Вопросы теории плазмы, т. 5, М., 1967. <sup>13</sup> А. А. Самарский, С. П. Курдюмов и др., ДАН, т. 206, № 2, 307 (1972). <sup>14</sup> С. П. Курдюмов, Ю. П. Попов, А. А. Самарский, Сб.: Тепло- и массоперенос, т. 8, Минск, 1972, стр. 11. <sup>15</sup> А. А. Самарский, И. М. Соболев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 702 (1963).