Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 62-50 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Я. З. ЦЫПКИН, Б. Т. ПОЛЯК

ДОСТИЖИМАЯ ТОЧНОСТЬ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ

(Представлено академиком В. А. Трапезниковым 14 III 1974)

1. Для решения задач оптимизации в условиях неопределенности широко используется адаптивный подход [1]. Так, при минимизации критерия оптимальности $J(\mathbf{c})=MQ(\mathbf{x},\mathbf{c})$ общий алгоритм адаптации имеет вид

$$\mathbf{c}[n]=\mathbf{c}[n-1]-\gamma[n]\mathbf{s}(\mathbf{c}[n-1],\ \mathbf{x}[n]), \tag{1}$$

где $\mathbf{c}[n]$ — N-мерный вектор настраиваемых параметров, $\gamma[n]\geqslant 0$ — скалярный детерминированный множитель, $\mathbf{s}(\mathbf{c},\mathbf{x})$ — случайный вектор.

При выполнении условия псевдоградиентности

$$\nabla J(\mathbf{c})^T\mathbf{R}(\mathbf{c})\geqslant 0,\quad \mathbf{R}(\mathbf{c})=M\mathbf{s}(\mathbf{c},\mathbf{x}) \tag{2}$$

и некоторых других условий можно гарантировать сходимость (в вероятностном смысле) последовательности $\mathbf{c}[n]$, определяемой алгоритмом (1), к точке минимума $\mathbf{c}^*$ при $n\to\infty$ [2]. Выбор стохастического псевдоградиента $\mathbf{s}(\mathbf{c},\mathbf{x})$ и параметров $\gamma[n]$ определяет работоспособность и качество алгоритма. Однако оказывается, что наличие неопределенности, вызванной неполным знанием критерия оптимальности, устанавливает определенные пределы осуществимой точности алгоритмов адаптации.

2. Качество алгоритма адаптации можно оценивать величиной $V[n]=$ $=M\|\mathbf{c}[n]-\mathbf{c}^*\|^2$.

Назовем $V[n]$ погрешностью адаптации, а $V^{-1}[n]$ — точностью адаптации. Всюду далее будем предполагать, что псевдоградиент удовлетворяет условию линейного роста

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{c})\|\leqslant L\|\mathbf{c}-\mathbf{c}^*\| \tag{3}$$

и, кроме того,

$$M\|\mathbf{R}(\mathbf{c})-\mathbf{s}(\mathbf{c},\mathbf{x})\|^2\geqslant\sigma_a^2+\sigma_0^2\|\mathbf{c}-\mathbf{c}^*\|^2. \tag{4}$$

Случай

$$\sigma_0^2=0,\quad \sigma_a^2>0 \tag{5}$$

соответствует наличию аддитивной помехи с ненулевой дисперсией. В случае

$$\sigma_0^2>0,\quad \sigma_a^2=0 \tag{6}$$

дисперсия помехи может убывать при приближении c к c^*, что имеет место, например, при мультипликативной помехе. Будем говорить, что (5) — это ситуация с абсолютной помехой, (6) — ситуация с относительной помехой.

Назовем L^2/σ_a^2 и $q=1+L^2/\sigma_0^2$ мерами априорной определенности в соответствующих ситуациях, а $A[n]=L^2/\sigma_a^2+1/(nV[0])$ средней мерой общей определенности.

Теорема 1. *В ситуации с абсолютной помехой произведение погрешности адаптации на время адаптации не может быть меньше меры общей неопределенности, т. е.*

$$V[n]n\geqslant A^{-1}[n]. \tag{7}$$

Теорема 2. *В ситуации с относительной помехой произведение погрешности адаптации в момент n на n-ю степень меры априорной определенности не может быть меньше начальной погрешности адаптации, т. е.*

$$V[n]q^n \geqslant V[0]. \tag{8}$$

Иными словами, для любого алгоритма адаптации в ситуации с абсолютной помехой погрешность адаптации убывает не быстрее $1/(k_1+k_2 n)$ $(k_1=L^2/\sigma_a^2,\ k_2=V^{-1}[0])$, а в ситуации с относительной помехой — не быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $1/q$.

Доказательство. Используя (2), (4), (5) и монотонность числовой функции z_+^2 (где $z_+=\max\{0, z\}$), получаем

$$M(\|\mathbf{c}[n]-\mathbf{c}^*\|^2|\mathbf{c}[n-1]) \geqslant \|\mathbf{c}[n-1]-\mathbf{c}^*-\gamma[n]\mathbf{R}(\mathbf{c}[n-1])\|^2+$$
$$+\gamma^2[n](\sigma_a^2+\sigma_0^2\|\mathbf{c}[n-1]-\mathbf{c}^*\|^2) \geqslant (\|\mathbf{c}[n-1]-\mathbf{c}^*\|-\gamma[n]\|\mathbf{R}(\mathbf{c}[n-1])\|)_+^2+$$
$$+\gamma^2[n](\sigma_a^2+\sigma_0^2\|\mathbf{c}[n-1]-\mathbf{c}^*\|^2) \geqslant [(1-\gamma[n]L)_+^2+\sigma_0^2\gamma^2[n]]\|\mathbf{c}[n-1]-c^*\|^2+$$
$$+\gamma^2[n]\sigma_a^2.$$

Беря математическое ожидание от обеих частей, имеем

$$V[n] \geqslant [(1-\gamma[n]L)_+^2+\sigma_0^2\gamma^2[n]]V[n-1]+\gamma^2[n]\sigma_a^2.$$

Нетрудно проверить, что правая часть достигает минимума при

$$\gamma[n]=LV[n-1]/(L^2V[n-1]+\sigma_0^2V[n-1]+\sigma_a^2),$$

поэтому

$$V[n] \geqslant (\sigma_0^2V[n-1]+\sigma_a^2)V[n-1]/(L^2V[n-1]+\sigma_0^2V[n-1]+\sigma_a^2).$$

Отсюда в случае (5) $V^{-1}[n] \leqslant V^{-1}[n-1]+L^2/\sigma_a^2$, что и дает после суммирования (7). В случае же (6) $V[n] \geqslant V[n-1]\sigma_0^2/(L^2+\sigma_0^2)$, откуда следует (8).

3. Полученные результаты можно обобщить на случай, когда величины $\mathbf{s}$, L, σ_a^2, σ_0^2 зависят от n. Пусть

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{c}, n)\| \leqslant L[n]\|\mathbf{c}-\mathbf{c}^*\|, \quad \mathbf{R}(\mathbf{c}, n)=M\mathbf{s}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, n), \tag{9}$$

$$M\|\mathbf{R}(\mathbf{c}, n)-\mathbf{s}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, n)\|^2 \geqslant \sigma_a^2[n]+\sigma_0^2[n]\|\mathbf{c}-\mathbf{c}^*\|^2. \tag{10}$$

Теорема 3. *В ситуации с абсолютной помехой*

$$V^{-1}[n] \leqslant V^{-1}[n-1]+L^2[n]/\sigma_a^2[n], \tag{11}$$

т. е. приращение точности адаптации, даваемое любым алгоритмом адаптации в момент n, не может быть больше меры определенности наблюдения в тот же момент. Отсюда

$$V[n] \geqslant 1 \Big/ \left(V^{-1}[0]+\sum_{m=1}^{n}\frac{L^2[m]}{\sigma_a^2[m]}\right). \tag{12}$$

Теорема 4. *В ситуации с относительной помехой*

$$V^{-1}[n] \leqslant V^{-1}[n-1](1+L^2[n]/\sigma_0^2[n]), \tag{13}$$

т. е. относительное увеличение точности адаптации, даваемое любым алгоритмом адаптации в момент n, не может быть больше меры определенности наблюдения в тот же момент. Отсюда

$$V[n] \geqslant V[0]\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{L^2[m]}{\sigma_0^2[m]}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Соотношения (12) и соответственно (14) можно привести к виду (7), (8).

4. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение теорем. Пусть $\mathbf{s}(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{c}} Q(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, т. е. алгоритм (2) соответствует градиентному методу при наличии помех, или, что то же, методу стохастической аппроксимации Роббинса — Монро. Если $\nabla J(\mathbf{c}) = M \nabla_{\mathbf{c}} V(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, а дисперсия помехи отлична от нуля: $M\|\nabla J(\mathbf{c}) - \nabla_{\mathbf{c}} Q(\mathbf{x}, \mathbf{c})\|^2 \geqslant \sigma_a^2 > 0$, то применима теорема 1. Таким образом, при любом способе выбора $\gamma[n]$ в алгоритме стохастической аппроксимации нельзя получить погрешность, меньшую, чем даваемую оценкой (9). С другой стороны, известно ([3]), что если задача одномерна, $\nabla J(\mathbf{c})$ линеен и $M\|\nabla_{\mathbf{c}} Q(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - \nabla J(\mathbf{c})\|^2 = \sigma_a^2 > 0$, то справедливо неравенство, обратное (7), т. е. алгоритм Дворецкого в этом случае дает минимальную возможную погрешность (ср. также ([4, 1])).

Рассмотрим алгоритм Кифера — Вольфовица для минимизации квадратичной функции вида (1) (для простоты ограничимся одномерным случаем). В этом алгоритме

$$\mathbf{s}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, n) = \frac{Q(x'[n], c+\alpha[n]) - Q(x''[n], c-\alpha[n])}{2\alpha[n]},$$

$\alpha[n] \geqslant 0$ — величина пробного шага. Тогда $R(c) = \nabla J(c)$, $\|R(c)\| = L\|c - c^*\|$, а $\sigma_a^2[n] = \sigma^2/(2\alpha^2[n])$, где $\sigma^2 = M(Q(x, c) - J(c))^2$ предполагается постоянным. Из теоремы 3 следует, что $V^{-1}[n] \leqslant V^{-1}[0] + \frac{2L^2}{\sigma^2} \sum_{m=1}^{n} \alpha^2[m]$, т. е. если $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2[m] < \infty$, то точность адаптации ограничена и сходимость $V[n]$ к 0 при $n \to \infty$ не может иметь места ни при каком способе выбора $\gamma[n]$. Поэтому, если $\alpha[n] = \alpha/n^p$, то для сходимости необходимо, чтобы $0 \leqslant p \leqslant 1/2$, причем $V[n]$ убывает не быстрее, чем $k/\ln n$ при $p = 1/2$, и не быстрее чем k/n^{1-2p} при $p < 1/2$. Те же выводы справедливы в многомерном случае, а также для метода случайного поиска с парной пробой ([5]) или для метода покоординатного спуска.

Пусть теперь производится минимизация квадратичной функции $J(\mathbf{c})$ методом случайного поиска при отсутствии помех ([5]). Тогда

$$\mathbf{s}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, n) = \frac{J(\mathbf{c} + \alpha[n]\mathbf{r}[n]) - J(c - \alpha[n]\mathbf{r}[n])}{2\alpha[n]} \mathbf{r}[n],$$

$\alpha[n] \geqslant 0$ — величина пробного шага, $\mathbf{r}[n]$ — случайный, одинаково распределенный вектор. Нетрудно показать, что если $M\|\mathbf{r}\|^4 < \infty$, а матрица ковариаций $\mathbf{r}$ и квадратичная форма $J(\mathbf{c})$ невырождены, то выполнены условия (3), (5). Поэтому из теоремы 2 получаем, что при любом способе выбора $\alpha[n]$, $\gamma[n]$ метод случайного поиска для детерминированной задачи не может сходиться быстрее геометрической прогрессии.

Наконец, аддитивный характер оценки (11) показывает, что нельзя уменьшить погрешность адаптации, вычисляя псевдоградиент с большей точностью за счет объединения нескольких наблюдений, как это предлагалось Блоком ([6]) для алгоритма Роббинса — Монро.

5. В математической статистике хорошо известно информационное неравенство (неравенство Крамера — Рао), устанавливающее нижнюю грань дисперсии произвольной оценки в задачах оценки параметров ([7]). Обсудим его связь с приведенными результатами. Прежде всего минимизация функции в условиях неопределенности не сводится к задаче оценки параметров: например, в задаче оптимизации можно произвольно выбирать точки, в которых измеряется значение функции или градиента, тогда как в статистике результаты наблюдений считаются заданными, а не формируются статистиком. Далее, рекуррентные оценки типа (1), как правило, являются смещенными (т. е. $M\mathbf{c}[n] \neq \mathbf{c}^*$). Для смещенных оценок при использовании не

равенства Крамера — Рао возникают серьезные трудности, связанные с существованием суперэффективных оценок (см., например, ([8])). Отметим еще, что при выводе информационных неравенств делают обычно довольно жесткие предположения регулярности ([7]), тогда как мы требовали выполнения весьма слабых условий типа (3), (4).

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
18 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Я. З. Цыпкин,* Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968. [2] *Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин,* Автоматика и телемеханика, № 3 (1973). [3] *A. Dvoretzky.* Proc. III Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1, 1956. [4] *А. А. Первозванский,* Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, М., 1962. [5] *Л. А. Растригин,* Статистические методы поиска, М., 1968. [6] *H. Block,* Ann. Math. Stat., v. 28, № 4 (1957). [7] *Г. Крамер,* Математические методы статистики, 1948. [8] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский,* Проблемы передачи информации, т. 9, № 3 (1973).