Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 531.396 *МЕХАНИКА*

В. И. ЗУБОВ

УПРАВЛЯЕМОЕ ВРАЩЕНИЕ И ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 3 VI 1974)

В настоящей заметке рассматривается проблема управления вращательным движением твердого тела, несущего систему материальных точек, совершающих относительное движение.

В результате рассмотрения установлено, что с помощью моментов кориолисовых сил инерции и моментов относительных количеств движения можно производить ориентацию и стабилизацию несущего тела в заданном направлении, а также принуждать это тело сканировать по заданной программе.

Рассмотрим твердое тело T_0, вращающееся вокруг неподвижной точки, и предположим, что с этим телом каким-либо образом связана система материальных точек, положение которых по отношению к телу T_0 единственным образом определяется с помощью обобщенных координат $q_1, \ldots, q_k$. При этих предположениях уравнение движения можно записать в форме

$$\Theta\dot{\bar{\omega}}+\bar{\omega}\times\Theta\bar{\omega}=\bar{M}+\bar{M}_{\text{к}}-\bar{M}_0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+(\dot{\bar{\omega}},\bar{E}_j)+P_j+R_j, \qquad j=1,\ldots,k. \tag{1}$$

где Θ — тензор инерции всей системы, рассматриваемой как единое твердое тело, T — кинетическая энергия относительных движений, $\bar{M}_{\text{к}}$ — момент кориолисовых сил инерции M_0 — момент относительных количеств движения.

Величины $P_j=P_j(q_1, \ldots, q_k, \omega)$ зависят от центробежных сил, величины $R_j=R_j(q_1,\ldots, q_k, \dot{q}_1,\ldots, \dot{q}_k, \bar{\omega})$ зависят от кориолисовых сил инерции. Q_j — обобщенная сила, отнесенная к обобщенной координате q_j, $\bar{E}_j$ — некоторый вектор, $\bar{E}_j=\bar{E}_j(q_1, \ldots, q_k)$, через $\bar{M}$ обозначим момент сил, действующих на систему.

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) система (1) разрешима относительно компонент вектора $\dot{\bar{\omega}}$ и величин $\ddot{q}_j$, так что имеем

$$\dot{\bar{\omega}}=\bar{A}_0+\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_iQ_i,$$
$$\ddot{q}_j=B_{0j}+\sum_{i=1}^{k}B_{ji}Q_i, \qquad j=1,\ldots,k;$$

в) среди векторов $\bar{A}_i$ существуют три линейно-независимых.

Выберем обобщенные силы Q_j так, чтобы было выполнено соотношение

$$\Theta\bar{A}_0+\sum_{i=1}^{k}\Theta\bar{A}_iQ_i+\bar{\omega}\times\Theta\bar{\omega}=\bar{M}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\bar{s}$ — орт, неизменный в абсолютном пространстве и пусть $\bar{r}$ — орт, неизменно связанный с телом T_0.

Теорема 1. *Если выполнены условия* а) *и* в) *и если обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (2), *где* $\bar{M}=-\bar{\omega}+l\bar{r}\times\bar{s}$, *то тело* T_0 *будет иметь положение относительного равновесия* $\bar{r}=\bar{s}$, $\bar{\omega}=0$.

При этом каждое движение, не совпадающее с другим относительным равновесием $\bar{r}=-\bar{s}$, $\bar{\omega}=0$, *будет обладать свойством* $\bar{r}\to\bar{s}$, $\bar{\omega}\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *при надлежащем выборе положительной постоянной* $l>0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* а) *и* b) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (2), *где*

$$\bar{M}=-(\bar{\omega}-\bar{\omega}_0)+\Theta\dot{\bar{\omega}}_0+\bar{\omega}_0\times\Theta\bar{\omega}+l\bar{r}\times\bar{s}_0,$$

$\bar{s}_0$ — *орт, вращающийся в абсолютном пространстве с угловой скоростью* $\bar{\omega}_0$, *то система* (1) *будет иметь положение относительного динамического равновесия*

$$\bar{r}=\bar{s}_0, \qquad \bar{\omega}=\bar{\omega}_0.$$

Каждое движение, не совпадающее с $\bar{r}=-\bar{s}_0$, $\bar{\omega}=\bar{\omega}_0$, *будет обладать свойством* $\bar{\omega}\to\bar{\omega}_0$, $\bar{r}\to\bar{s}_0$ *при* $t\to+\infty$ *при надлежащем выборе* $l>0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* а) *и* b) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (2), *где* $\bar{M}=-(\bar{\omega}-\bar{s}(\bar{\omega},\bar{s}))+l\bar{r}\times\bar{s}$.

Тогда система (1) *будет иметь две системы относительных положений равновесия*

$$\bar{r}=\bar{s}, \quad \bar{\omega}=\lambda\bar{s} \quad и \quad \bar{r}=-\bar{s}, \quad \bar{\omega}=\mu\bar{s},$$

где λ *и* μ — *вещественные параметры. Каждое движение твердого тела* T_0, *не совпадающее с положениями относительного равновесия второй группы, будет обладать свойством* $\bar{r}\to\bar{s}$, $\bar{\omega}\to\lambda\bar{s}$ *при* $t\to+\infty$ *при надлежащем выборе числа* $l>0$.

Доказательство приведенных утверждений осуществляется путем построения функции Ляпунова и использованием первых интегралов системы (1).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 I 1974