Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 513.82+511 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ШТОГРИН

О КЛАССИФИКАЦИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РЕШЕТОК ПО БРАВЕ, ВОРОНОМУ И ДЕЛОНЕ

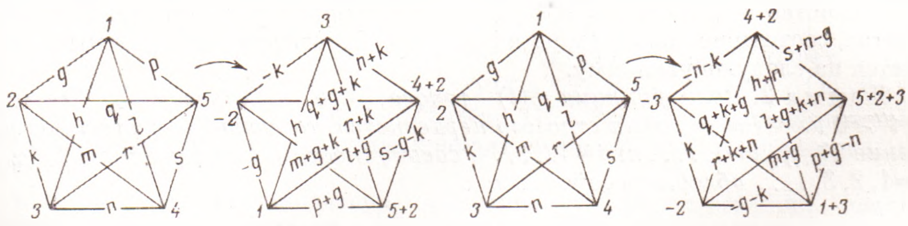
(Представлено академиком С. М. Никольским 18 II 1974)

1. Существует всего 11 различных полных групп поворотов четырехмерных симплексов. Легко указать комплексы равенств ребер четырехмерного симплекса, необходимые и достаточные, для того чтобы симплекс обладал той или иной полной группой поворотов. Эти же группы являются полными группами поворотов основных 5-сторонников Зеллинга четырехмерных решеток, и они характеризуются аналогичными комплексами равенств параметров Зеллинга.

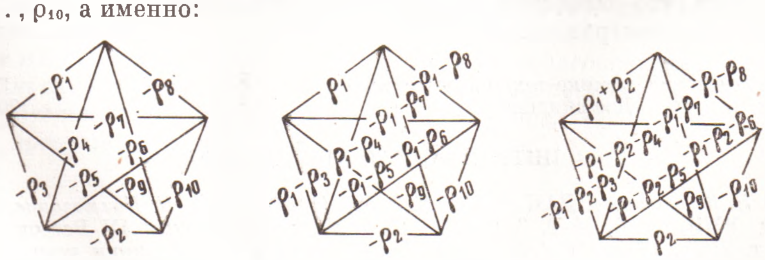
2. Любому ребру четырехмерного параллелоэдра Дирихле — Вороного соответствует регулятор [8], равный произведению длины ребра на толщину соответствующего ему слоя.

Условия положительности регуляторов примитивного параллелоэдра задают в пространстве коэффициентов квадратичных форм некоторую выпуклую гоноэдральную область — область типа Вороного. При $n=4$ имеется всего 3 неэквивалентные области Δ, Δ', Δ'' типов Вороного [8] и 49 неэквивалентных их граней различных измерений, обладающих точками в конусе **K**, т. е. всего 52 типа Вороного [10, 14].

3. Любой основной 5-сторонник Зеллинга четырехмерной решетки с помощью конечного числа шагов приведения



можно привести [10] к такому 5-стороннику, у которого любой дигон и любой тригон не положительный. Параметры Зеллинга приведенного 5-сторонника довольно просто связаны с независимыми регуляторами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{10}$, а именно:



В последнем случае ввиду приведенности символа имеем $\rho_i=\rho_2+\alpha_i$, где $\alpha_i\geqslant 0$, $3\leqslant i\leqslant 10$.

Области пространства параметров, соответствующие этим трем приведенным симплициальным символам, обозначим соответственно через R, R', R'' (см. ([8])). Разбиение конуса **K** на области, эквивалентные областям R, R', R'' приведения Шарва, является нормальным и G-инвариантным. Области R и R' совпадают с областями в Δ и Δ', а область R'' является девятой частью области Δ''.

4. Совокупность всех точек конуса **K**, которым соответствуют 5-сторонники Зеллинга с наименьшей суммой квадратов векторов, представляет собой область $\mathbf{V}(\varphi)$ приведения Венкова ([9]), где φ — главная форма I типа Вороного. Область $\mathbf{V}(\varphi)$ состоит из одной области R, 10 областей, эквивалентных R', и 30 областей, эквивалентных R''. Любая 9-мерная грань области $\mathbf{V}(\varphi)$ определяется либо 0-дигоном, либо 0-тригоном. Шаг приведения через 0-дигон (0-тригон) индуцирует преобразование, которое оставляет инвариантной 9-мерную грань области $\mathbf{V}(\varphi)$, соответствующую рассматриваемому 0-дигону (0-тригону), и переводит $\mathbf{V}(\varphi)$ в смежную по этой грани область. Разбиение конуса **K** на области, эквивалентные $\mathbf{V}(\varphi)$, является нормальным и G-инвариантным.

В решетке, соответствующей внутренней точке области $\mathbf{V}(\varphi)$, имеется единственная пара центрально-симметричных приведенных 5-сторонников Зеллинга. В решетке же, соответствующей точке границы области $\mathbf{V}(\varphi)$, имеется несколько таких пар. Выберем в решетке Λ какой-либо приведенный 5-сторонник Зеллинга за исходный и применим к нему шаги приведения через всевозможные его 0-дигоны и 0-тригоны. Все получившиеся при этом новые приведенные 5-сторонники опять приведем через всевозможные их 0-дигоны и 0-тригоны и т. д. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не перестанут появляться новые приведенные 5-сторонники. В итоге мы заведомо получим по 5-стороннику — представителю из всех имеющихся в решетке Λ пар центрально-симметричных приведенных 5-сторонников Зеллинга.

5. Полная группа поворотов какой-либо решетки Λ вокруг ее точки O, совмещающих эту решетку с собой, называется голоэдрией. Любой поворот из голоэдрии переводит приведенный 5-сторонник Зеллинга решетки Λ опять в себя, либо в другой приведенный 5-сторонник Зеллинга этой же решетки. Наличие такого поворота обусловливается соответственно либо надлежащей симметрией приведенного симплициального символа, либо одинаковостью приведенных симплициальных символов, соответствующих конгруэнтным приведенным 5-сторонникам Зеллинга (с общим началом O) решетки Λ. И учитывая п. 1 и п. 4, нетрудно выписать группу матриц, описывающих все повороты голоэдрии рассматриваемой решетки Λ в ее основном репере. Такая группа матриц называется арифметической голоэдрией ([6]).

6. Любая конечная группа целочисленных матриц индуцирует группу аффинных преобразований конуса **K** в себя, оставляющую по теореме Машке неподвижной хоть одну точку конуса **K**. Множество $\mathscr{B}$ всех точек конуса **K**, неподвижных при преобразованиях такой группы, называется многообразием Браве ([5]).

Многообразие Браве является линейным и определяемая им плоскость проходит через вершину O конуса **K**. Полная группа $H(\mathscr{B})$ целочисленных матриц, которой соответствует данное многообразие Браве $\mathscr{B}$, является арифметической голоэдрией ([6]). Пересечение (если оно не пустое) двух многообразий Браве также является многообразием Браве. Два многообразия Браве называют эквивалентными, если целочисленно эквивалентны соответствующие им арифметические голоэдрии. Если многообразие Браве $\mathscr{B}$ содержит подмногообразие Браве $\mathscr{B}'$, то $H(\mathscr{B})$ является подгруппой группы $H(\mathscr{B}')$. Многообразие Браве, очищенное от всех его подмногообразий Браве низших измерений, обладает тем свойством, что всем его точкам соответствуют решетки одного и того же типа Браве ([6]). Всем точкам, принадлежащим пересечению очищенного многообразия Браве с областью типа Вороного или ее гранью какого-либо измерения, соответствуют решетки одного и того же сорта Делоне.

7. Пусть точка конуса **K** непрерывно перемещается внутри рассматриваемой выше области $\mathbf{V}(\varphi)$ или внутри ее грани какого-либо измерения. Тогда в решетке, соответствующей этой точке, сохраняется аффинный тип ее комплекса приведенных 5-сторонников Зеллинга (тип «приведенного ежа»). Однако вследствие изменения метрики решетки ее приведенные 5-сторонники могут как приобретать дополнительную симметрию, так и терять ее, а также некоторые приведенные 5-сторонники ежа могут становиться конгруэнтными или переставать быть такими. А это приводит к изменению голоэдрии решетки. Сочетая все возможные варианты симметрии какого-либо приведенного 5-сторонника ежа со всеми возможными вариантами конгруэнтностей приведенных 5-сторонников этого ежа, мы переберем не только все голоэдрии соответствующих решеток, но даже и все сорта приведенного ежа рассматриваемого аффинного типа.

8. Области R, R', R'' и их грани различных измерений будем задавать приведенным симплициальным символом. Параметры Зеллинга такого символа выразим через некоторые положительные независимые параметры (см. п. 3), которые обозначим через a, b, $c, \ldots$, такие, что положительность параметров задает указанные области и их грани.

Среди всех различных приведенных симплициальных символов, эквивалентных какому-либо исходному, т. е. соответствующему исходной фиксированной грани области R, R', или R'', выберем только те, у которых как количество, так и взаиморасположение 0-сторон, 0-дигонов и 0-тригонов как у исходного. Будем всевозможными способами совмещать исходный символ с собой, а также с эквивалентными ему символами, соблюдая лишь то условие, чтобы 0-стороны, 0-дигоны и 0-тригоны совмещались с 0-сторонами, 0-дигонами и 0-тригонами. Любое такое совмещение сопровождается некоторой системой равенств между параметрами a, b, $c, \ldots$ Эти системы, а также всевозможные их комбинации как раз и соответствуют всевозможным арифметическим голоэдриям решеток с рассматриваемым приведенным симплициальным символом (соответствующим фиксированной грани). Таких систем (вместе с комбинациями) имеется лишь конечное число. Любую полученную систему можно учесть (записать) на самом символе (за счет уменьшения количества независимых параметров), каждую на своем, который назовем подготовленным.

Учитывая конечность числа областей R, R', R'' и их граней различных измерений и сказанное выше, получаем, что всего (общий список) имеется лишь конечное число неэквивалентных подготовленных символов.

9. Из всех подготовленных символов с каким-либо данным порядком голоэдрии выберем за исходный один, у которого параметры Зеллинга выражаются через наибольшее количество положительных независимых параметров a, b, $c, \ldots$ Соответствующие ему точки конуса **K** заполняют всю внутренность некоторого выпуклого гоноэдра того или иного измерения. Если же независимые параметры a, b, $c, \ldots$ принимают любые действительные значения, то соответствующие точки заполняют всю плоскость, определяемую этим гоноэдром, пересечение которой с конусом **K** является некоторым многообразием Браве $\mathscr{B}$.

Пусть в конусе **K** имеются точки с нулевым значением какого-либо параметра, например a. Тогда в нем имеются точки с отрицательными значениями этого параметра, но при этом соответствующий симплициальный символ, вообще говоря, уже не является приведенным. Приведем его при условии, что абсолютная величина параметра a, принявшего отрицательные значения, достаточно мала по сравнению с положительными параметрами b, $c \ldots$ Параметры Зеллинга полученного приведенного символа опять выразим через положительные независимые параметры (см. п. 3). Полученный подготовленный символ слабо эквивалентен ([7]) исходному символу, а соответствующий ему гоноэдр эквивалентен гоноэдру, расположенному в первом слое Эрмита ([11], [12]) в многообразии Браве $\mathscr{B}$ и смежному с исходным гоноэдром по его грани, задаваемой уравнением $a=0$.

Поступив так с каждым независимым параметром исходного подготовленного символа, мы получим слабо эквивалентные ему подготовленные символы, заменяющие весь первый слой Эрмита. Аналогично получаем подготовленные символы, заменяющие второй, третий, ... слои. В конечном числе действий мы из общего списка выделим все попарно неэквивалентные подготовленные символы, слабо эквивалентные исходному. Далее выделяем еще все те подготовленные символы с рассматриваемым порядком голоэдрии, но с меньшим количеством независимых параметров, которые получаются как частные случаи из уже полученных (т. е. заменяющие некоторые перегородки в разбиении многообразия Браве $\mathscr{B}$). Решетки, соответствующие всем выделенным подготовленным символам, исчерпывают уже всю совокупность решеток с исследуемым типом Браве.

Так найдены и полностью исследованы все имеющиеся 64* попарно неэквивалентные многообразия Браве (см. ([1-4])). С помощью пересечений, многообразий Браве с областями Δ, Δ', Δ'' типов Вороного и их гранями различных измерений получены 295 сортов Делоне четырехмерных решеток.

10. Используя полученную нами таблицу решеток, можно найти точную фундаментальную область приведения для $n=4$. Так, например, замыкание фундаментальной области можно задать объединением трех гоноэдров.

1) $0\geqslant g,\ g\geqslant n,\ n\geqslant r,\ n\geqslant s,\ g\geqslant k,\ k\geqslant h,\ k\geqslant l,\ k\geqslant m,\ g\geqslant p,\ g\geqslant q$;

2) $g\geqslant 0,\ 0\geqslant n,\ n\geqslant r,\ n\geqslant s,\ 0\geqslant g+k,\ k\geqslant h,\ k\geqslant l,\ k\geqslant m,\ 0\geqslant g+p,\ 0\geqslant g+q$;

3) $g\geqslant n,\ n\geqslant 0,\ 0\geqslant n+r,\ 0\geqslant n+s,\ 0\geqslant g+k+n,\ k\geqslant h,\ k\geqslant l,\ k\geqslant m,\ 0\geqslant g+p,\ 0\geqslant g+q$, являющихся фундаментальными частями областей R, R' и R''.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Б. Н. Делоне, по настоянию которого выполнена данная работа.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. L. Mackay, G. S. Pawley*, Acta crystallogr., v. 16, 11 (1963). [2] *А. М. Заморзаев, Б. В. Цекиновский*, Кристаллография, т. 13, 211 (1968). [3] *Т. С. Кунцевич, Н. В. Белов*, Там же, т. 15, 215 (1970). [4] *H. Wondratschek, R. Bülow, J. Neubüser*, Acta crystallogr., A27, 523 (1971). [5] *Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 64, 28 (1961). [6] *Р. В. Галиулин, С. С. Рышков*, Сборн. Проблемы кристаллологии, М., 1971. [7] *С. С. Рышков*, ДАН, т. 206, № 3, 542 (1972). [8] *Г. Ф. Вороной*, Собр. соч., т. 2, 1952, стр. 239. [9] *Б. А. Венков*, Изв. АН СССР, № 4, 37 (1940). [10] *Б. Н. Делоне*, УМН, в. 3, 16 (1937); в. 4. 102 (1938). [11] *Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин, М. И. Штогрин*, В кн. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973. [12] *Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин, М. И. Штогрин*, В кн. Кристаллографические этюды, Л., 1973. [13] *Д. К. Фаддеев*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 128, 229 (1972). [14] *М. И. Штогрин*, Там же, т. 123, 52 (1973).

---

* Применяя ([13]), легко получить, что из 64 различных абстрактных групп Браве 10 групп представляют зеркальные пары групп движений. Поэтому в кристаллографии естественно было бы различать 74 типа Браве четырехмерных решеток.