

И. М. КАРАСЕВ

**К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
В ПРОСТРАНСТВАХ $C^{(\alpha)}(G)$ И $L_q^{(\alpha)}(G)$**

(Представлено академиком И. Н. Векуа 17 V 1974)

1. В дальнейшем будем использовать понятия и обозначения, принятые в работах ^(1, 2). Напомним некоторые из них: G — некоторая область евклидова n -мерного пространства E^n , ∂G — достаточно гладкая граница области G , $C^{(\alpha)}(G)$ — множество функций $f(x) \in C(G)$, имеющих в $G \times G$ непрерывные производные $f^{(\alpha)}(P, Q)$ порядка α , $0 < \alpha < 1$, с нормой ^(3, 4)

$$\|f(x)\|_{C^{(\alpha)}(G)} = \max_{Q \in G} |f(Q)| + \max_{(P, Q) \in G \times G} |f^{(\alpha)}(P, Q)|; \quad (1,1)$$

$L_q^{(\alpha)}(G)$ — множество функций $f(x) \in L_q(G)$, $q > 1$, имеющих в $G \times G$ производные $f^{(\alpha)}(P, Q) \in L_q(G)$ порядка α , $0 < \alpha < 1$, с нормой ^(3, 4)

$$\|f(x)\|_{L_q^{(\alpha)}(G)} = \left(\int_G |f(Q)|^q dQ \right)^{1/q} + \left(\iint_G |f^{(\alpha)}(P, Q)|^q dP dQ \right)^{1/q}, \quad q > 1. \quad (1,2)$$

$W_p^l(G)$, $l = [l] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, — обобщенное пространство Соболева ^(5, 6).

Теория разрешимости задачи Дирихле в $C^{(\alpha)}(G)$ и $L_q^{(\alpha)}(G)$, как известно ^(1, 2), основывается на теоремах вложения ^(3, 4), пространства $W_p^l(G)$ в $C^{(\alpha)}(G)$ и $L_q^{(\alpha)}(G)$. Однако это вложение имеет место при определенных условиях. Пусть, например, обобщенное решение задачи Дирихле принадлежит $W_2^l(G)$, тогда условие $pl > n$ вложения $W_2^l(G)$ в $C^{(\alpha)}(G)$ приводит к размерности пространства $n < 2$. Так возникает проблема принадлежности обобщенного решения из $W_2^l(G)$ пространству $W_2^r(G)$, где $r \geq 2$. Для случая $r = 2$ этот вопрос успешно решается в работе ⁽⁷⁾.

2. Пусть $n = 3$. В области $G(E^3)$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью, рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x) u \right) + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = \psi(x), \quad (2,1)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f(x), \quad f(x) \in L_q(G), \\ f(x) &\in L_{q/2}(G); \\ u(x)|_{\partial G} &= \varphi(x)|_{\partial G}, \\ \varphi(x) &\in L_2^{(\alpha)}(G), \quad 0 < \alpha < 1/2. \end{aligned} \quad (2,2)$$

Будем предполагать, что уравнение (2,1) строго эллиплично, т. е.

$$\nu \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^3 \xi_i^2, \quad \nu, \mu = \text{const.}$$

Пусть

$$a_0 = \frac{1}{\text{mes } G} \int_G a(x) dx,$$

$$a^+(x) = \max\{a(x) - a_0; 0\}, \quad a^-(x) = -a_0 + \max\{-a(x) + a_0; 0\},$$

$$M = \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^3 (b_i - a_i)^2 \right\|_{L_{\bar{q}/2}(G)}; \|a^+(x)\|_{L_{\bar{q}/2}(G)} \right\},$$

$$C_1(\bar{q}) = \left\{ \frac{M(2\nu+1)^3}{\nu^2 \bar{q}} \cdot 2C^2(\bar{q}) \right\}^{\bar{q}/(\bar{q}-3)} \frac{\bar{q}-3}{3}, \quad \bar{q} > 3,$$

$C(\bar{q})$ — некоторая постоянная, зависящая только от \bar{q} и размерности пространства, $\delta = \{2C_1(\bar{q}) + \frac{8}{\nu}\} C_0^2 \text{mes}^{2/3} G$, где C_0 — постоянная, не зависящая от G .

Теорема 1. *Задача Дирихле (2,1) и (2,2) имеет обобщенное решение, принадлежащее пространству $L_2^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$, если уравнение (2,1) строго эллиптического типа и выполнены условия*

$$\left\| \sum_{i=1}^3 a_i^2, \sum_{i=1}^3 b_i^2 \right\|_{L_{\bar{q}/2}(G)}, \quad \|a(x)\|_{L_{\bar{q}/2}(G)} \leq \mu, \quad \mu > 0;$$

$$C_1(\bar{q}) - \frac{4}{\nu} a_0 \leq 0, \quad \bar{q} > 3.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in L_2^{(\alpha)}(\partial G)$, $0 < \alpha < 1/2$, тогда из теоремы вложения пространства $W_p^1(G)$ в $L_q^{(\alpha)}(G)$ следует, что $\varphi(x) \in W_2^1(G)$ (3), и если выполняются остальные условия теоремы, то будет существовать обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле (2,1), (2,2) в пространстве $W_2^1(G)$ (7). Поскольку $pl < 3$, то $u(x) \in L_q^{(\alpha)}(G_s)$, где $1 < s \leq 3$, $2 \leq q < 2s$, $0 < \alpha < s/q - 1/2$. Полагаем $s=3$, тогда $2 \leq q < 6$, $0 < \alpha < 3/q - 1/2$. Если принять $q=2$, то $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. *Задача Дирихле (2,1), (2,2) имеет не более одного обобщенного решения в $L_2^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$, если уравнение (2,1) строго эллиптического типа и выполнены условия*

$$\left\| \sum_{i=1}^3 a_i^2, \sum_{i=1}^3 b_i^2 \right\|_{L_{\bar{q}/2}(G)}, \quad \|a\|_{L_{\bar{q}/2}(G)} \leq \mu,$$

где $\bar{q} > 3$, $\mu = \text{const} > 0$; $\delta < 0$.

Доказательство. Пусть $u_1(x) \in W_2^1(G)$ и $u_2(x) \in W_1^1(G)$ — два обобщенных решения задачи (2,1), (2,2). Их разность $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ будет решением однородной задачи

$$Lu = 0, \tag{2,3}$$

$$u|_{\partial G} = 0. \tag{2,4}$$

Однако при выполнении условий теоремы задача (2,3), (2,4) в пространстве $W_2^1(G)$ имеет своим решением функцию $u(x) \equiv 0$ (7). Поскольку имеет место $W_2^1(G) \rightarrow L_2^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$, то $u(x) \in L_2^{(\alpha)}(G)$.

В силу этого в $L_2^{(\alpha)}(G)$ имеем $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Теорема 3. Если уравнение (2,4) строго эллиптического типа, коэффициенты и свободные члены которого удовлетворяют условиям

$$\left\| \sum_{i=1}^3 a_i^2, \sum_{i=1}^3 b_i^2, a \right\|_{L_{\bar{q}/2}(G)} \leq \mu, \quad \bar{q} > 3,$$

$$\|f_i(x)\|_{L_2(G)}, \quad \|f\|_{L_{6/5}(G)} \leq \mu,$$

$$\left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right\|_{L_{\bar{q}}(G)}, \quad \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a \right\|_{L_{\hat{q}, 2}(G)} \leq \mu,$$

где

$$\hat{q} = \max(\bar{q}, 4), \quad \|\psi\|_{L_2(G)} \equiv \left\| f + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\| \leq \mu < \infty,$$

имеет обобщенное решение $u(x) \in L_2^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x)|_{\partial G} = \varphi(x)|_{\partial G}, \quad \varphi(x) \in C^{(\alpha)}(G),$$

$0 < \alpha < 1/2$, причем G обладает свойством \mathfrak{R} , тогда решение $u(x) \in C^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in W_2^1(G)$, тогда $u(x) \in L_2^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1$. При выполнении условий теоремы $u(x) \in W_2^2(G)$, но $W_2 \rightarrow C^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < 1/2$.

Отсюда следует, что $u(x) \in C^{(\alpha)}(G)$.

Кабардино-Балкарский государственный университет
Нальчик

Поступило
10 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Карасев, ДАН, т. 203, № 5 (1972). ² И. М. Карасев, Дифференциальные уравнения, т. 9, 1 (1973). ³ И. А. Киприянов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24 (1960). ⁴ И. А. Киприянов, ДАН, т. 126, № 6 (1959). ⁵ В. И. Буренков, Тр. симпозиума по теоремам вложения, Баку, 1966. ⁶ Л. П. Слободецкий, ДАН, т. 118, № 2 (1958). ⁷ О. А. Лавыженская, Н. И. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964.