

В. М. КРУГЛОВ

**ГЛОБАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 24 IV 1974)

В настоящей заметке предлагается глобальная теорема нового типа, которая представляет собой обобщение результата автора (1).

Пусть дана последовательность серий $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm_n}$ независимых для каждого $n=1, 2, \dots$ случайных величин. Обозначим F_{nj}, F_n и f_{nj}, f_n функции распределения (ф.р.) и характеристические функции (х.ф.) случайных величин $\xi_{nj}, \xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nm_n}$, соответственно; μ — медиану случайной величины ξ ; \bar{F} и $F^{(s)}$ — ф.р. случайных величин $\bar{\xi} = \xi - \mu$ и $\xi^{(s)} = \xi - \xi'$, где ξ и ξ' независимы и имеют общую ф.р. F ; L — метрику П. Леви; $\lambda(D)$ — индикатор множества D ; E — ф.р. случайной величины, почти всюду равной нулю. С каждой случайной величиной ξ_n свяжем симметричную безгранично делимую (б.д.) ф.р. Q_n , определяемую х.ф.

$$q_n(t) = \exp \left(\int (\cos(tu) - 1) dH_n(u) \right),$$

$$H_n(u) = \sum_{j=1}^{m_n} (F_{nj}^{(s)}(u) - E(u)), \quad n=1, 2, \dots$$

Здесь и далее мы не указываем пределы интегрирования, если интеграл берется по всей прямой.

Определение. Непрерывная на всей прямой функции φ принадлежит классу \mathfrak{B}_1 , если выполнены условия:

- а) φ четная, строго возрастает на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$,
- б) φ выпуклая (вниз) на $[0, \infty)$.
- в) для любых x и y и некоторого фиксированного $A \geq 1$

$$\varphi(x+y) \leq A(\varphi(x) + \varphi(y));$$

φ принадлежит классу \mathfrak{B}_2 , если выполнены условия а) и в) с $A=1$ и условие

- г) для любых x и $0 < c \leq 1$ и некоторого фиксированного $\alpha > 0$

$$\varphi(cx) \leq c^\alpha \varphi(x).$$

Из условия в) следует, что $\varphi(x) \leq \beta |x|^\alpha$ с некоторыми $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Примерами могут служить функции:

$$\varphi_1(x) = |x|^p, \quad p \geq 1, \quad \varphi_1 \in \mathfrak{B}_1; \quad \varphi_2(x) = |x|^p, \quad 0 < p \leq 1, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{B}_2.$$

Теорема. Пусть даны ф.р. F и функция $\varphi \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ такие, что

$$\int \varphi(F(x) - E(x)) dx < \infty.$$

Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(F_n(x) - F(x)) dx = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} L(F_n, F) = 0,$$

$$2) \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \int_{x > R} \varphi(\Phi_n(x)) dx = 0,$$

$$\Phi_n(x) = \sum_{j=1}^{m_n} [1 - \bar{F}_{nj}(x) + \bar{F}_{nj}(-x)], \quad n=1, 2, \dots$$

З а м е ч а н и е. Предположим дополнительно, что случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nm_n}$ равномерно предельно малы. Тогда условие 2) можно заменить следующим:

$$2') \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi(G_n(x) - G(x)) dx + \int_0^{\infty} \varphi(G(x) - G_n(x) + G_n(+\infty) - G(+\infty)) dx \right] = 0;$$

здесь G_n и G — спектральные функции сопровождающей безгранично делимой ф.р. для F_n и безгранично делимой ф.р. F в представлении А. Я. Хинчина х.ф. соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Доказательство условия 1) проводится аналогично случаю $\varphi(x) = |x|^p, p > 0$ (см. (1)). Для доказательства условия 2) введем обозначения:

$$B_n = \{|\xi_n^{(s)}| > R\}, \quad B_{nj} = \{|\xi_{nj}^{(s)}| > 2R\},$$

$$D_{nj} = \bigcap_{i \neq j} \{|\xi_{ni}^{(s)}| \leq 2R\} \cap \{|\xi_n^{(j)}| < R\}, \quad \xi_n^{(j)} = \xi_n^{(s)} - \xi_{nj}^{(s)}, \quad n=1, 2, \dots$$

Для каждого $n=1, 2, \dots$ множества $B_{nj} \cap D_{nj}, 1 \leq j \leq m_n$, не пересекаются и $B_n \supseteq \bigcup_{j=1}^{m_n} (B_{nj} \cap D_{nj})$. Функция $\psi(x) = 2 + (x/1+x)$ удовлетворяет условиям: $2 \leq \psi < 3, \psi(x+y) \leq \psi(x)\psi(y)$ для любых x и y .

В силу независимости случайных величин и свойств ψ имеем

$$\begin{aligned} M[\psi(\xi_n^{(s)}) \lambda(B_n)] &\geq \sum_{j=1}^{m_n} M[\psi(\xi_n^{(s)}) \lambda(B_{nj} \cap D_{nj})] \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{m_n} M[\psi(\xi_{nj}^{(s)}) \lambda(B_{nj})] \cdot M(\psi(-\xi_n^{(j)}))^{-1} \lambda(D_{nj}). \end{aligned} \quad (1)$$

Неравенство П. Леви ((2), стр. 261) дает (см. (1))

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \inf_n \inf_j P(D_{nj}) = 1. \quad (2)$$

Из (1), (2) и неравенства симметризации ((2), стр. 259) для всех достаточно больших R равномерно по $n=1, 2, \dots$ следует

$$\begin{aligned} P(|\xi_n| > 1/2 R) &\geq 1/2 P(|\xi_n^{(s)}| > R) \geq 1/6 M[\psi(\xi_n^{(s)}) \lambda(B_n)] \geq \\ &\geq 1/18 \sum_{j=1}^{m_n} P(|\xi_{nj}^{(s)}| < 2R) \geq 1/36 \sum_{j=1}^{m_n} P(|\xi_{nj} - \mu_{nj}| > 2R). \end{aligned} \quad (3)$$

Из условия в) определения имеем: для любого целого $m > 0$ и любого a

$$\varphi(ma) \leq A^m m \varphi(a). \quad (4)$$

Условие 2) теперь следует из (3), (4) и условия а) определения.

Доказательство достаточности. По неравенству Ю. В. Прохорова ((²), теорема 2.1) для любого $R > 0$

$${}^{1/2}P(|\xi_n - \mu_n| > R) \leq P(|\xi_n^{(s)}| > R) \leq 8[1 - Q_n({}^{1/2}R) + Q_n({}^{1/2}R)]. \quad (5)$$

Из условия 1) и неравенства $1 - q_n(t) \leq 1 - |f_n(t)|^2$ вытекает слабая компактность последовательности ф.р. $\{Q_n\}$ ((²), стр. 206). Фиксируем число $\Delta > 0$, чтобы точки $\pm\Delta$ были точками непрерывности всех спектральных функций H_n , $n = 1, 2, \dots$. Ф.р. Q_n представим в виде $Q_n = Q_{n1} * Q_{n2}$, где б.д. ф.р. Q_{n1} , Q_{n2} определяются х.ф., соответственно

$$q_{n1}(t) = \exp \left(\int_{|x| \leq \Delta} (\cos(tx) - 1) dH_n(x) \right),$$

$$q_{n2}(t) = \exp \left(\int_{|x| > \Delta} (\cos(tx) - 1) dH_n(x) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что спектральные функции, определяющие б.д. ф.р. Q_{n1} , $n = 1, 2, \dots$, сосредоточены в сегменте $[-\Delta, \Delta]$ (т. е. постоянны вне сегмента $[-\Delta, \Delta]$). Следовательно, ((¹), лемма 1) найдется число $\alpha > 0$ такое, что

$$\sup_n \int \exp(\alpha|x| \ln(|x|+1)) dQ_{n1}(x) < \infty. \quad (6)$$

Из слабой компактности $\{Q_{n2}\}$ следует ((²), стр. 324)

$$\sup_n \delta_n(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

$$\delta_n(r) = \sum_{j=1}^{m_n} [1 - F_{nj}^{(s)}(r) + F_{nj}^{(s)}(-r)], \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому мы будем считать, что $\delta_n = \delta_n(\Delta) \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$

Для ф.р. Q_{n2} имеет место представление

$$Q_{n2} = e^{-\delta_n} \left[E + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} K_n^{*m} \right],$$

$$K_n = H_n, \quad x \leq -\Delta; \quad H_n(-\Delta), \quad |x| \leq \Delta; \quad \delta_n + H_n, \quad x > \Delta.$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{B}_1$. Из неравенства для $x > 0$, $m = 1, 2, \dots$

$$\delta_n^m - K_n^{*m}(x) \leq \delta_n^{m-1} m [\delta_n - K_n(x/m)]$$

следует

$$1 - Q_{n2}(x) \leq e^{-\delta_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_n^m}{m!} \left[\delta_n - K_n \left(\frac{x}{m+1} \right) \right].$$

По неравенству Иенсена и из того факта, что $0 \leq \delta_n \leq 1$, имеем

$$\varphi(1 - Q_{n2}(x)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi \left(\delta_n - K_n \left(\frac{x}{m+1} \right) \right).$$

Для любого $R > 0$

$$\int_R^{\infty} \varphi(1 - Q_{n2}(x)) dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{m!} \int_{R/(m+1)}^{\infty} \varphi(\delta_n - K_n(x)) dx. \quad (7)$$

Заметим далее, что для $x > \Delta$

$$\delta_n - K_n(x) + K_n(-x) \leq 2\Phi_n(1/2x).$$

Из последнего неравенства и условия 2) следует, что ряд в (7) сходится равномерно по $R > 0$ и $n = 1, 2, \dots$

Полагая в (7) $R \rightarrow \infty$ под знаком ряда и учитывая условие 2) и симметричность K_n, Q_{n1}, Q_{n2} , получим

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \int_R^\infty \varphi(1 - Q_{n2}(x) + Q_{n2}(-x)) dx = 0. \quad (8)$$

Ввиду условия 1) медианы μ_n ограничены в совокупности. Из (5), (6), (8) и неравенства (см. (4))

$$\varphi(P(|\xi_n - \mu_n| > x)) \leq A^{16} \cdot 16 [\varphi(1 - Q_{n-1}(1/4x) + Q_{n1}(-1/4x)) + \varphi(1 - Q_{n2}(1/4x) + Q_{n2}(-1/4x))].$$

следует достаточность условий.

Пусть теперь $\varphi \in \mathfrak{B}_2$. Для любого $R \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_R^\infty \varphi(1 - Q_{n2}(x) + Q_{n2}(-x)) dx \leq \\ & \leq e^{-\alpha \delta_n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m!)^\alpha} \int_R^\infty \varphi(\delta_n^m - K_n^{*m}(x) + K_n^{*m}(-x)) dx. \end{aligned}$$

Далее применимы предыдущие рассуждения. Теорема доказана.

Я глубоко признателен В. М. Золотареву за тщательный просмотр заметки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ V. M. Kruglov, Lecture Notes in Mathematics, v. 330, 254 (1973). ² М. Лозе, Теория вероятностей, ИЛ, 1962. ³ Ю. В. Прохоров, Теория вероятностей и ее применения, т. 3, № 2, 153 (1958).