Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 518.1:519.34

МАТЕМАТИКА

А. Б. БАКУШИНСКИЙ, Б. Т. ПОЛЯК

О РЕШЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 13 II 1974)

1^0. Теория вариационных неравенств дает удобный математический аппарат для единообразного получения результатов, относящихся к выпуклым задачам на экстремум, к задачам о седловых точках и точках равновесия игр n лиц, к решению операторных уравнений с монотонными или нерастягивающими операторами и ряду других задач. Основой этой теории служит теория монотонных операторов, развитая в работах Браудера, Вайнберга, Минти, Лионса и Рокафеллара ([1-3]). Ниже исследуются три метода решения вариационных неравенств. Аналогами первого являются метод последовательных приближений для операторных уравнений, методы градиента, обобщенного градиента и проекции градиента для задач минимизации. Второй основан на методе регуляризации А. Н. Тихонова. Третий метод — нового типа и объединяет идеи первых двух.

2^0. Пусть E, E^* — дуальная пара линейных пространств. Множество $G\subset E\times E^*$ называется монотонным, если $(y_2-y_1,\ x_2-x_1)\geqslant 0$ для любых $\{x_1,\ y_1\}\in G$, $\{x_2,\ y_2\}\in G$, и максимальным монотонным, если G не является собственным подмножеством другого монотонного множества. Оператор T (вообще говоря, многозначный) из E в E^* называется (максимальным) монотонным, если его график $G(T)$ — (максимальное) монотонное множество. Будем обозначать $D(T)=\{x\in E\colon\ T(x)\neq\varnothing\}$, $R(T)=\{y\in E^*\colon\ y\in T(x),\ x\in D(T)\}$. Однозначный оператор T называется хеминепрерывным, если для любых x, z таких, что $x+\lambda z\in D(T)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, функция $\lambda\to(T(x+\lambda z),\ u)$ непрерывна для всех $u\in E$. Если при этом $D(T)=E$, то из монотонности следует максимальная монотонность. Пусть $K\subset E$; точка $z_0\in K$ называется решением вариационного неравенства

$$(T(z),\ x-z)\geqslant 0,\quad x\in K, \tag{1}$$

если найдется $y_0\in T(z_0)$ такое, что $(y_0,\ x-z_0)\geqslant 0$ для всех $x\in K$. В дальнейшем для сокращения записи мы будем использовать обозначение $T(x)$ и для произвольного или фиксированного элемента из множества $T(x)$.

Лемма 1. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, E^* — его сопряженное, T — монотонный, K — выпуклое замкнутое непустое множество, $D(T)\supset K$, и либо T — максимальный и $K\cap D(T)^0\neq\varnothing$, либо T — однозначный хеминепрерывный.*

Тогда условия «z_0 — решение (1)» и «$(T(x),\ x-z_0)\geqslant 0$ для всех $x\in K$» эквивалентны.

Следствие. *В условиях леммы 1 Z_0 — множество решений (1) — выпукло и замкнуто.*

Лемма 2. *Если в дополнение к условиям леммы 1 T коэрцитивен (т. е. $(T(x),\ x)/\|x\|\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$, $x\in K$), то $Z_0\neq\varnothing$.*

3^0. Если T удовлетворяет условию сильной монотонности

$$(T(x)-T(z),\ x-z)\geqslant m\|x-z\|^2,\quad x,\ z\in D(T),\quad m>0, \tag{2}$$

то для решения (1) в гильбертовом пространстве может быть применен итерационный метод

$$x^{n+1}=P_K(x^n-\alpha_n(T(x^n)+h_n)); \tag{3}$$

здесь P_K — оператор проектирования на K, h_n — вектор, играющий роль погрешности вычислений (либо, например, погрешности аппроксимации при замене задачи конечномерной).

Теорема 1. *Пусть E гильбертово, выполнены условия леммы 1, условие* (2) *и любое из условий:*

A. $\|T(x)\| \leqslant L(1+\|x\|)$, $x \in K$, $\alpha_n \to 0$;

B. $\|T(x)-T(z)\| \leqslant L\|x-z\|$, $x, z \in K$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n < 2m/L^2$;

C. $T(x)$ — *потенциальный, дифференцируемый,* $\|T'(x)\| \leqslant M$, $x \in K$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n < 2/M$;

D. $T(x) = x - R(x)$, $\|R(x)-R(z)\| \leqslant q\|x-z\|$, $q<1$, $x, z \in K$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n < 2/(1+q)$.

Тогда, если $\alpha_n \geqslant 0$, $\sum \alpha_n = \infty$, $\|h_n\| \leqslant \|h_{n-1}\|$, $\|h_n\|/\alpha_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то в методе* (3) $x^n \to z_0$, *где* z_0 — *единственное решение* (1).

Доказательство. Пусть z^n — решение неравенства $(T(z)+h_n, x-z) \geqslant 0$, $x \in K$. Тогда $z^n \to z_0$ и $\|z^n - z^{n-1}\| \leqslant 2\|h_n\|/m$. Поскольку $z^n = P_K(z^n - \alpha_n(T(z^n)+h_n))$, то для величины $\mu_{n+1} = \|x^{n+1}-z^n\|^2$ во всех случаях A—D получается оценка вида $\mu_{n+1} \leqslant (1-c\alpha_n)\mu_n + \gamma_n$, $\gamma_n = o(\alpha_n)$. При $\sum \alpha_n = \infty$ отсюда следует, что $\mu_n \to 0$, а потому и $x^n \to z_0$.

Можно показать, что если $\|h_n\| \leqslant k\rho^n$, $\rho<1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n > 0$, то в случаях B, C, D имеет место сходимость со скоростью геометрической прогрессии. Во всех вышеприведенных условиях константы m, M, L и т. д. можно также заменить на функции от $\|x\|$, при этом теорема сходимости становится локальной. Частные случаи теоремы 1 можно найти в [4-6].

4°. Если условие (2) не выполнено, то для решения (1) можно применить метод регуляризации. В нем на n-м шаге нужно решать вариационное неравенство

$$(T(z)+\varepsilon_n A(z)+h_n,\ x-z) \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\varepsilon_n > 0$ — параметр регуляризации, а регуляризующий оператор $A(z)$ (возможно, многозначный) из E в E^* удовлетворяет условию равномерной монотонности

$$(A(x)-A(z),\ x-z) \geqslant \|x-z\|\psi(\|x-z\|). \tag{5}$$

$$\psi(t)>0,\ 0<t<\infty, \quad \psi(0)=0, \quad \psi(t)\to\infty \text{ при } t\to\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, (5), A *монотонный,* $D(A) \supset K$ *и либо* T, A *однозначны и хеминепрерывны, либо* T *и* A *максимальные и* $K \cap D(T)^0 \cap D(A)^0 \neq \phi$.

Тогда существует z^n — *единственное решение* (4), *и если* $Z_0 \neq \phi$, *то* $z^n \to z^*$, *где* z^* — *единственное решение вариационного неравенства*

$$(A(z),\ x-z) \geqslant 0, \quad x \in Z_0. \tag{6}$$

Если, кроме того, $z^* \in D(A)^0$, *то справедлива оценка*

$$\psi(\|z^n - z^{n-1}\|) \leqslant c|\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n|/\varepsilon_n + (\|h_n\| + \|h_{n-1}\|)/\varepsilon_n. \tag{7}$$

Для однозначных T и A близкие результаты получены в [8]. Выбор A, удовлетворяющего условию (5), возможен не во всяком пространстве. Однако если E равномерно выпукло, то можно взять, например, $A(x) = \partial\|x-a\|^2$, $a \in E$ (в частности, в гильбертовом пространстве годится $A(x) = x-a$). Тогда z^* — точка из Z_0, ближайшая к a.

5°. Явное решение вариационного неравенства (4) возможно только в редких случаях. Можно применить для его решения метод (3). При этом нет необходимости находить z^n точно: достаточно сделать один шаг процесса (3), а затем изменить ε_n. Тогда мы приходим к итерационному методу

$$x^{n+1} = P_K(x^n - \alpha_n(T(x^n)+\varepsilon_n A(x^n)+h_n)). \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть* E — *гильбертово, выполнены условия теоремы* 2, $\psi(t) = mt$, $m>0$, $z^* \in D(A)^0$ *и выполнено любое из условий:*

A. $\|T(x)\|\leqslant L(1+\|x\|)$, $\|A(x)\|\leqslant L(1+\|x\|)$, $x\in K$, $\alpha_n=o(\varepsilon_n)$.

B. $\|T(x)-T(z)\|\leqslant L\|x-z\|$, $\|A(x)-A(z)\|\leqslant L\|x-z\|$, $x,\ z\in K$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ [\alpha_n(1+\varepsilon_n)^2/\varepsilon_n]<2m/L^2$.

C. *T, A потенциальные дифференцируемые*, $\|T'(x)\|\leqslant M$, $\|A'(x)\|\leqslant M$, $x\in K$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (1+\varepsilon_n)\alpha_n<2/M$.

D. $T(x)=x-R(x)$, $\|R(x)-R(z)\|\leqslant\|x-z\|$, $x,\ z\in K$, $A(x)=x-a$, $a\in E$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ [(1-\alpha_n)/\varepsilon_n]>0$.

Тогда, если $\alpha_n\geqslant0$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_n\to0$, $\sum\alpha_n\varepsilon_n=\infty$, $\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1}=1+o(\alpha_n\varepsilon_n)$, $\|h_n\|\leqslant\|h_{n-1}\|$, $\|h_n\|/\alpha_n\varepsilon_n^2\to0$, *то в методе* (8) $x^n\to z^*$.

Доказательство ведется по той же схеме, что и в теореме 1, с использованием теоремы 2. Примерами последовательностей α_n, ε_n, удовлетворяющих условиям теоремы, могут служить: A. $\alpha_n=n^{-1/2}$, $\varepsilon_n=n^{-p}$, $0<p<1/2$, B. $\alpha_n=\theta\varepsilon_n$, $\varepsilon_n=n^{-p}$, $0<p<1/2$, $\theta<2m/L^2$, C. $\alpha_n=\alpha$, $0<\alpha<1/M$, $\varepsilon_n=n^{-p}$, $0<p<1$, D. $\alpha_n=1/(1+\varepsilon_n)$, $\varepsilon_n=n^{-p}$, $0<p<1$ (в последнем случае метод (8) принимает вид $x^{n+1}=P_K(\alpha_n(R(x^n)-h_n))$ при $a=0$).

Несколько иной способ объединения методов (3) и (4) для случая однозначных операторов рассматривали Гаевский и Клюге [5, 6]. Они предлагали при фиксированном ε делать $N(\varepsilon)$ итераций метода (3), а затем уменьшать ε, при этом $N(\varepsilon)\to\infty$ для $\varepsilon\to0$.

6°. Приведем некоторые приложения полученных результатов.

1. З а д а ч а м и н и м и з а ц и и. Ищется минимум выпуклого полунепрерывного снизу функционала $f(x)$: $E\to(-\infty,+\infty]$ на замкнутом выпуклом множестве K. Если $D(f)^0\supset K$ (где $D(f)=\{x\in E\colon f(x)\neq+\infty\}$), то эта задача эквивалентна решению вариационного неравенства (1) с $T(x)=\partial f(x)$, причем T — максимальный монотонный и $D(T)^0\supset K$ [3]. Метод (3) при $h_n\equiv0$ превращается в метод проекции градиента (для дифференцируемых $f(x)$) или в метод обобщенного градиента (для недифференцируемых $f(x)$), а из теоремы 1A—C следуют известные результаты о сходимости этих методов [9–11]. Аналогично метод (4) совпадает с некоторым обобщением метода регуляризации А. Н. Тихонова (например, [12, 13]). Для таких задач иной способ сочетания регуляризации с градиентными методами предлагался в [14].

2. З а д а ч а о с е д л о в о й т о ч к е. Если $\varphi(u,v)$ выпукла по u, вогнута по v, то при некоторых условиях [15] отыскание седловой точки эквивалентно решению (1), где $x=\{u,v\}$,

$$K=K_1\times K_2,\quad E=E_1\times E_2,\quad T(x)=\{\partial_u\varphi(u,v),\ -\partial_v\varphi(u,v)\}.$$

Метод (3) является обобщением градиентного метода Удзавы [16]. Некоторые результаты, примыкающие к теореме 1 для этого случая, можно найти в [17]. Метод (8) дает возможность находить седловые точки без предположения о сильной выпуклости — вогнутости (в частности, для матричных игр) и имеет вид

$$\begin{aligned}u^{n+1}&=P_{K_1}[u^n-\alpha_n(\partial_u\varphi(u^n,v^n)+\varepsilon_n\partial g_1(u^n)+h_n^1],\\ v^{n+1}&=P_{K_2}[v^n+\alpha_n(\partial_v\varphi(u^n,v^n)-\varepsilon_n\partial g_2(v^n)+h_n^2],\end{aligned}\tag{9}$$

где $g_1(u)$, $g_2(v)$ — равномерно выпуклые функционалы (например, $g_1(u)=\|u-a_1\|^2$, $g_2(v)=\|v-a_2\|^2$).

3. В ы п у к л о е п р о г р а м м и р о в а н и е. Ищется минимум $f_0(x)$ при ограничениях $f_i(x)\leqslant0$, $i=1,\ldots,N$, $x\in Q$, где f_i, $i=0,1,\ldots,N$, — выпуклые непрерывные функционалы, Q — выпуклое замкнутое множество. Метод штрафных функций заключается в последовательной минимизации $\Phi_n(x)=\varepsilon_nf_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{N}f_i(x)_+^2$ ($t_+=\max\{0,t\}$) на Q. С точностью до обозначений он совпадает с методом регуляризации, и из теоремы 2 следует, что

если f_0 — равномерно выпуклый ([12]), то z^n — точки минимума $\Phi_n(x)$ — сходятся к решению исходной задачи при $\varepsilon_n \to 0$. Метод (8) принимает вид $x^{n+1} = P_Q(x^n - \alpha_n(\partial\Phi_n(x^n) + h_n))$, и теорема 3 дает условия его сходимости. Далее, при выполнении условий регулярности ([16]) задача сводится к рассмотренной выше задаче о седловой точке $L(x, y) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{N} y_i f_i(x)$ по $x \in Q$, $y \geqslant 0$. В частности, метод (8) для задачи линейного программирования $\min(c, x)$, $Bx \leqslant d$, $x \geqslant 0$ в простейшем случае принимает вид

$$x^{n+1} = [x^n - \alpha_n(c + B^T y^n + \varepsilon_n x^n + h_n^1)]_+,$$
$$y^{n+1} = [y^n + \alpha_n(Bx^n - d - \varepsilon_n y^n + h_n^2)]_+ \qquad (10)$$

и при единственном предположении о существовании решения сходится к нормальному решению (т. е. решению с минимальной нормой) прямой и двойственной задач. Для рассмотренных в этом пункте задач условия на α_n, ε_n в методе (8) могут быть ослаблены.

4. Точки равновесия. Задача о нормализованных точках равновесия бескоалиционных игр n лиц, а также некоторые равновесные модели математической экономики могут быть сведены ([18]) к отысканию точки $z^* \in K \subset E$ такой, что $\Phi(x, z^*) \geqslant \Phi(z^*, z^*)$ для всех $x \in K$, что в свою очередь эквивалентно (в предположении выпуклости $\Phi(x, z)$ по x) решению вариационного неравенства (1) с $T(x) = \partial_x \Phi(x, z)|_{z=x}$. При условии сильной монотонности различные итерационные методы решения задачи (в частности, типа (3)) рассматривались в ([18]). Метод (8) позволяет находить точки равновесия при отсутствии сильной монотонности.

5. Решение операторных уравнений. Уравнение $0 \in T(x)$ эквивалентно вариационному неравенству (1) с $K = E$, так что результаты работы применимы к решению уравнений с (многозначными) монотонными операторами. Рассмотрим один частный случай. Пусть E — гильбертово, уравнение имеет вид $x = R(x)$, $D(R) = E$ и $\|R(x) - R(y)\| \leqslant q\|x - y\|$, $q \leqslant 1$. Тогда $T = I - R$ максимальный монотонный, а если $q < 1$, то T сильно монотонный, метод (3) при $\alpha_n = 1$ превращается просто в метод последовательных приближений при наличии помех: $x^{n+1} = R(x^n) + h_n$ и из теоремы 1D следует его сходимость в случае $\|h_n\| \to 0$. Если $q = 1$, то применим метод (8), который при выборе $\alpha_n = 1/(1 + \varepsilon_n)$, $A(x) = x$ принимает вид $x^{n+1} = \dfrac{1}{1+\varepsilon_n}(R(x^n) + h_n)$. Из теоремы 3D следует, что если решение существует, $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1} = 1 + o(\varepsilon_n)$, $\|h_n\| = o(\varepsilon_n^2)$ (например, $\varepsilon_n = n^{-p}$, $0 < p < 1$), то метод сходится к решению с минимальной нормой. Результат такого типа (при $h_n \equiv 0$) был ранее получен в ([19]).

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР

Институт проблем управления
Москва

Поступило
7 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. М. Вайнберг*, Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., 1972. [2] *Ж. Л. Лионс*, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., 1972. [3] *R. T. Rockafellar*, In: Theory and Appl. Monot. Oper., Gubbio, 1969, 1970. [4] *M. Sibony*, Calcolo, v. 7, № 1—2 (1970). [5] *H. Gajewski, R. Kluge*, Math. Nachr., v. 46, № 1—6 (1970). [6] *R. Kluge*, Monatsb. Deutsche Acad. Wiss., v. 12, № 2—3 (1970). [7] *R. T. Rockafellar*, Michigan Math. J., v. 16, № 4 (1969). [8] *F. E. Browder*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 56, № 4 (1966). [9] *Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 6, № 5 (1966). [10] *Ю. М. Ермольев*, Кибернетика, № 4 (1966). [11] *Б. Т. Поляк*, ДАН, т. 174, № 1 (1967). [12] *Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк*, ДАН, т. 168, № 5 (1966). [13] *А. Б. Бакушинский*, В сборн.: Методы управления большими системами, т. 1, Иркутск, 1970. [14] *Б. М. Будак, Е. М. Беркович, Ю. Л. Гапоненко*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 9, № 2 (1969). [15] *R. T. Rockafellar*, Proc. Symp. Pure Math., v. 18, 1 (1970). [16] *К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава*, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962. [17] *В. Ф. Демьянов, А. Б. Певный*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 12, № 5 (1972). [18] *С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак*, Экон. матем. мет., т. 7, № 6 (1971). [19] *B. Halpern*, Bull. Am. Math. Soc., v. 73, № 6 (1967).