Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 517.55 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

ОБ ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ М. КАРТРАЙТ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 VIII 1973)

Через $\mathbf{C}^n$ мы обозначим n-мерное комплексное пространство, через $\mathbf{R}^n$ — вещественную гиперплоскость в $\mathbf{C}^n$. Запись $z\in\mathbf{C}^n$ означает, что $z=(z_1,\ldots,z_n)$, где $z_1,\ldots,z_n$ — комплексные числа; запись $x\in\mathbf{R}^n$ — что $x=(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_1,\ldots,x_n$ — вещественные числа. В пространстве $\mathbf{C}^n$ мы рассматриваем две нормы:

$$|z|_1=\sum_{j=1}^{n}|z_j|,\qquad |z|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|z_j|.$$

Пусть $k=(k_1,\ldots,k_n)$ — мультииндекс. По определению полагаем $k!=k_1!\ldots k_n!$; $z^k=z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$, $z\in\mathbf{C}^n$.

Мы говорим, что целая функция $f(z)$, заданная в $\mathbf{C}^n$, имеет экспоненциальный тип $\sigma\in(0,\infty)$, если величина $\sup\limits_{z\in C^n}\{|f(z)|e^{-A|z|_1}\}$ конечна при любом $A>\sigma$ и бесконечна при любом $A<\sigma$.

Определение 1. Множество $E\subset\mathbf{R}^n$ называется нормирующим при данном σ, если для любой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, заданной в $\mathbf{C}^n$ и удовлетворяющей условию $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|\leqslant 1$, выполняется неравенство $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)|\leqslant C$, где величина $C<\infty$ зависит лишь от n, σ и множества E и не зависит от функции f.

До последнего времени нормирующие множества изучались при $n=1$. Начало этому изучению было положено следующей теоремой М. Картрайт: множество $\{j\}_{j=-\infty}^{\infty}\subset\mathbf{R}^1$ нормирующее при любом $\sigma<\pi$. Даффин и Шеффер [1] усилили результат М. Картрайт, показав, что каждая последовательность $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{\infty}\subset\mathbf{R}^1$, удовлетворяющая условиям $\sup\limits_{|j|<\infty}|\lambda_j-j|<\infty$ и $\inf\limits_{j'\neq j}|\lambda_j-\lambda_{j'}|>0$, также является нормирующим множеством при любом $\sigma<\pi$.

Если $E_1,\ldots,E_n\subset\mathbf{R}^1$ — нормирующие множества при данном σ, то множество $E=E_1\times\ldots\times E_n\subset\mathbf{R}^n$ также нормирующее при данном σ. В частности, множество всех целочисленных точек в $\mathbf{R}^n$ нормирующее при любом $\sigma<\pi$. Л. И. Ронкин заметил, что при $n>1$ сдвигать эти точки, как в теореме Даффина — Шеффера, вообще говоря, нельзя: при любом $p>1$ множество $\{x\in\mathbf{R}^2\colon x_1=pj,\ j=0,\pm1,\ldots\}$ не является нормирующим при $\sigma\geqslant\pi/p$, так как это множество вещественных нулей функции $\varphi(z_1,z_2)=\sin(\pi z_1/p)$, однако оно содержит подмножество $\{\lambda_k\}$ точек, занумерованных целочисленными точками $k=(k_1,k_2)\in\mathbf{R}^2$, таких, что

$$\sup_k|\lambda_k-(k_1,k_2)|_1<\infty,\qquad \inf_{k\neq k'}|\lambda_k-\lambda_{k'}|_1>0.$$

Недавно Б. Я. Левин получил как следствие развитой им теории субгармонических мажорант [2] такую теорему: каждое множество $E\subset\mathbf{R}^n$, относительно плотное по n-мерной мере Лебега, является нормирующим при любом $\sigma<\infty$. Относительная плотность множества E означает существование такой постоянной $L<\infty$, что

$$\inf_{x\in\mathbf{R}^n}\{\mathrm{mes}_n(\{y\in\mathbf{R}^n:\ |y-x|_1\leqslant L\}\cap E)\}>0.$$

Доказательство этого результата, основанное на иных соображениях, получил В. Э. Кацнельсон ([3]). Аппроксимационный метод, развитый в настоящей статье, позволяет дать еще одно доказательство теоремы Б. Я. Левина.

Для формулировки основного результата настоящей работы понадобится следующее

Определение 2. Множество $E\subset\mathbf{R}^n$ называется δ-сетью (в $\mathbf{R}^n$), если $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\rho(x,E)\leqslant\delta$, где $\rho(x,y)=|x-y|_1$.

Теорема 1. *Пусть p — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $p>en$ и*

$$p>\frac{e^2}{2}\left\{\max_{0\leqslant\tau\leqslant 2}\left[e^{\tau}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^p\right]\right\}^{n-1}, \tag{1}$$

и пусть σ и δ — положительные числа, для которых $2p\sigma\delta<1$.

Тогда для любой δ-сети $E\subset\mathbf{R}^n$ и любой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, заданной в $\mathbf{C}^n$ и удовлетворяющей условию $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|\leqslant 1$, выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)|\leqslant(1-\sigma\delta)^{-1}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция в $\mathbf{C}^n$ экспоненциального типа не выше σ, ограниченная на $\mathbf{R}^n$, а E — некоторая δ-сеть в $\mathbf{R}^n$. Если $\sigma\delta<1$ и $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|\leqslant 1$, то*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)|\leqslant(1-\sigma\delta)^{-1}.$$

Лемма 2. *Пусть $f(z)=\sum\limits_{|k|_1=0}^{\infty}c_kz^k$ — целая функция в $\mathbf{C}^n$ экспоненциального типа не выше σ, и пусть натуральное число $p>e\sigma n$.*

Тогда

$$\max_{|z|_\infty\leqslant m}\left|f(z)-\sum_{|k|_1=0}^{pm}c_kz^k\right|=o(1),\qquad m\to\infty.$$

Лемма 1 немедленно следует из классической теоремы С. Н. Бернштейна, согласно которой неравенство $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^1}|f'(x)|\leqslant\sigma\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^1}|f(x)|$ выполняется для всех целых функций $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, заданных в $\mathbf{C}^1$. Доказательство леммы 2 основано на известной оценке коэффициентов разложения $f(z)$ в кратный ряд Тейлора через величину типа этой функции.

Заметим, что теорему 1 достаточно доказать при $\sigma=1$. Пусть $f(z)=\sum\limits_{|k|_1=0}^{\infty}c_kz^k$ — произвольная целая функция в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая условиям теоремы 1 с $\sigma=1$. Сопоставим ей последовательность целых функций

$$\varphi_m(z)=\mathscr{P}_{pm}(z)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(2z_j/m)}{2z_j/m}\right)^{pm},\quad m=1,2,\dots,$$

где натуральное число p определено в условии теоремы 1, а $\mathscr{P}_{pm}(z)=$
$=\sum_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k$. Каждая из функций $\varphi_m(z)$ имеет экспоненциальный тип $2p$
а $\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\varphi_m(x)|<\infty$. Кроме того последовательность $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится
к $f(x)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbf{R}^n$. Докажем неравенство

$$\sup_{x\in E}|\varphi_m(x)|\leqslant 1+o(1),\qquad m\to\infty. \tag{2}$$

Пусть сначала $x\in E_m=E\cap\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x|_\infty\leqslant m\}$. Так как $\sup_{x\in E_m}|f(x)|\leqslant 1$
то по лемме 2 $\sup_{x\in E_m}|\mathscr{P}_{pm}(x)|\leqslant 1+o(1)$, $m\to\infty$, а значит, $\sup_{x\in E_m}|\varphi_m(x)|\leqslant$
$\leqslant 1+o(1)$, $m\to\infty$. Оценим функцию $\varphi_m(x)$ вне гиперкуба $\{x\in\mathbf{R}^n$
$:|x|_\infty\leqslant m\}$. Пусть $A=\sup_{z\in C^n}\{|f(z)|e^{-2|z|_1}\}$. Тогда по неравенству Коши
$|c_k|\leqslant A\cdot 2^{|k|_1}(k!)^{-1}$, $|k|_1=0, 1,\ldots$ Пусть точка $z\in\mathbf{C}^n$ такова, что $r_{j_\nu}=$
$=|z_{j_\nu}|\geqslant pm$, $\nu=1,\ldots,l$, а остальные $r_j=|z_j|$ меньше pm (мы не исключаем того, что $l(n-l)=0$). Не ограничивая общности, можно считать, что
$j_\nu=\nu$, $\nu=1,\ldots,l$. Так как при всех $r>0$ выполняется неравенство
$\sum_{q=0}^{pm}(2r)^q/q!<e^{2r}$, а при $r\geqslant pm$ — неравенство

$$\sum_{q=0}^{pm}\frac{(2r)^q}{q!}\leqslant\frac{r^{pm}}{(pm)!}\sum_{q=0}^{pm}\frac{2^q(pm)^{q-pm}(pm)!}{q!}<\frac{(er)^{pm}}{(pm)!}\sqrt{3\pi pm},$$

то для величины $\mathscr{P}_{pm}(z)$ справедлива оценка

$$|P_{pm}(z)|\leqslant A\prod_{j=1}^{n}\Big(\sum_{q=0}^{pm}(2r_j)^q/q!\Big)\leqslant A\prod_{j=1}^{l}\left\{\frac{(er_j)^{pm}}{(pm)!}\sqrt{3\pi pm}\right\}\cdot\exp\Big(2\sum_{j=l+1}^{n}\mathbf{r}_j\Big) \tag{3}$$

Пусть $|x|_\infty>m$ и пусть, для определенности, $|x_1|,\ldots,|x_l|\geqslant pm$
$pm>|x_{l+1}|,\ldots,|x_q|\geqslant m$ и $m>|x_{q+1}|,\ldots,|x_n|$. Учитывая (3), находим

$$|\varphi_m(x)|\leqslant A\prod_{j=1}^{l}\left\{\frac{(e|x_j|)^{pm}}{(pm)!}\sqrt{3\pi pm}\right\}\cdot\exp\Big(2\sum_{j=l+1}^{n}|x_j|\Big)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{m}{2|x_j|}\right)^{pm}\cdot\prod_{j=q+1}\left\{\frac{\sin(2x_j/m)}{2x_j/m}\right\}^{pm}. \tag{4}$$

Так как

$$\frac{(er)^{pm}}{(pm)!}\left(\frac{2r}{m}\right)^{-pm}\leqslant\left(\frac{e^2}{2p}\right)^{pm}\frac{1}{\sqrt{\pi pm}},$$

$$\max_{1\leqslant r/m\leqslant p}\left\{e^{2r}\left(\frac{m}{2r}\right)^{pm}\right\}=\max\left\{\left(\frac{e^2}{2^p}\right)^m,\left(\frac{e^2}{2p}\right)^{pm}\right\},$$

$$\max_{0\leqslant r\leqslant m}\left\{e^{2r}\left(\frac{\sin(2r/m)}{2r/m}\right)^{pm}\right\}=\max_{0\leqslant\tau\leqslant 2}\left\{e^{\tau}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{p}\right\}^{m},$$

то, вспоминая (1), из (4) получим неравенство $\sup_{|x|_\infty\geqslant m}|\varphi_m(x)|\leqslant 1$, справедливое для всех достаточно больших m. Неравенство (2) доказано.

По лемме 1 из (2) следует, что $\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\varphi_m(x)|\leqslant(1+o(1))(1-2p\delta)^{-1}$
$m\to\infty$, а значит, и неравенство $\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)|\leqslant(1-2p\delta)^{-1}$. Вновь применяя

лемму 1, получаем утверждение теоремы 1.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть даны натуральное* n *и конечное* $q\geqslant 1$. *Им отвечают такие числа* $p\in(0,\infty)$ *и* $\nu\in(0,1)$, *что, каковы бы ни были конечные* $\sigma>0$, $\delta>0$ *и* $\delta'>0$, *удовлетворяющие условиям* $p\sigma\delta<1$ *и* $\nu\delta<\delta'<\delta$, *для любой целой функции* $f(z)$, *заданной в* $\mathbf{C}^n$, *экспоненциального типа не выше* σ *и любой* δ*-сети* $E=\{x^{(\mu)}\}_{\mu=1}^{\infty}\subset\mathbf{R}^n$ *такой, что* $\inf\limits_{\mu\neq\mu'}|x^{(\mu)}-x^{(\mu')}|_1\geqslant\delta'$, *выполняется неравенство*

$$C_1\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q\,dx\leqslant\sum_{\mu=1}^{\infty}|f(x^{(\mu)})|^q\leqslant C_2\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q\,dx;$$

здесь величины $C_j\in(0,\infty)$, $j=1,2$, *не зависят от функции* f.

Автор глубоко признателен Л. И. Ронкину, чей живой интерес к этой работе во многом способствовал ее завершению. Автор также искренне благодарит Б. Я. Левина и членов руководимого им семинара за полезное обсуждение результатов работы.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
14 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. I. Duffin, A. C. Shaeffer*, Am. J. Math., v. 67, 141 (1945). [2] *Б. Я. Левин*, Тез. докл. Всесоюзн. конфер. по ТФКП, Харьков, 1971, стр. 117. [3] *В. Э. Кацнельсон*, Матем. сб., т. 92 (134), 1 (9), 34 (1973).