Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.947.42 *МАТЕМАТИКА*

Л. И. КАМЫНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ЛОКАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ (В СМЫСЛЕ ЛИПШИЦА) РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА ВБЛИЗИ БОКОВОЙ ЧАСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 V 1974)

В качественной теории параболических уравнений 2-го порядка важное место занимает вопрос о влиянии геометрической конфигурации границы области на поведение непрерывного решения вблизи границы. В наших работах ([1-3]), посвященных теоремам типа Жиро, было показано: 1) если непрерывное решение параболического уравнения 2-го порядка имеет строгий экстремум в точке M параболической границы и область слишком «узка» вблизи M, то некасательная производная решения в точке M может обратиться в нуль; 2) если граничная точка экстремума M удовлетворяет относительно области требованию строгой (с условием Дини) p-параболоидности изнутри (так что область не слишком «узка» вблизи M), то некасательные производные решения в точке M обязательно отличны от нуля.

В настоящей заметке рассмотрен близкий вопрос о регулярности (в смысле Липшица) решения параболического уравнения 2-го порядка вблизи границы. Получены следующие результаты:

а) если граница обладает относительно области свойством строгой (с условием Дини) p-параболоидности извне и выполнены естественные требования к поведению граничных значений решения, то вблизи боковой части параболической границы непрерывное решение параболического уравнения удовлетворяет условию Липшица (в параболической метрике);

б) если непрерывное решение параболического уравнения имеет строгий экстремум в точке M параболической границы и дополнение области слишком «узко» вблизи M, то некасательная производная решения в точке M может стать бесконечной и потому вблизи M решение не будет регулярно по Липшицу.

По своим результатам для параболических уравнений 2-го порядка работа примыкает к работам ([4-6]) авторов, где рассмотрен аналогичный вопрос о локальной регулярности для решений эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка.

Пусть D — компактная область эвклидова пространства $E_{n+1}=\{(x_1,\dots,x_n;\ t)\}$ и (см. определения, например, в ([6])) $\gamma(D)$ — верхняя крышка D, $\gamma_0(D)$ — нижняя крышка D, $\Gamma(D)=\partial D\setminus\gamma(D)$ — параболическая граница D. Множество $\Sigma(D)=\Gamma(D)\setminus\gamma_0(D)$ назовем боковой частью параболической границы $\Gamma(D)$. Рассмотрим в $D\cup\gamma(D)$ равномерно параболический оператор 2-го порядка с ограниченными коэффициентами

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (1)$$

Имея в виду применение принципа максимума, будем считать, что

$$-C\leqslant c(x,\ t)\leqslant 0,\qquad (x,\ t)\in D\cup\gamma(D). \qquad (2)$$

Условие А. Пусть функция $\Omega(s))\neq 0$ выпукла вверх на отрезке $[0, s_0]$ и дважды дифференцируема на интервале $(0, s_0)$. Будем считать, что Ω является модулем непрерывности (для самой себя) на $[0, s_0]$.

Пусть $M^0=(x^0, t_0)\in E_{n+1}$, $h>0$ и $(y, \tau)=(y_1, \ldots, y_n; \tau)$ есть местная система декартовых координат с началом в точке M^0 и с осью $O\tau$, коллинеарной оси Ot. Пусть

$$\Pi(M^0, h)=\{(y, \tau)\in E_{n+1}\,|\,-h<y_1<|z'|_p\Omega(|z'|_p)<0\} \tag{3}$$

или

$$\Pi(M^0, h)=\{(y, \tau)\in E_{n+1}\,|\,0<|z'|_p\Omega(|z'|_p)<y_1<h\}, \tag{4}$$

где

$$z'=(y_2, \ldots, y_n; \tau), \quad |z'|_p=\left(\sum_{i=2}^{n} y_i^2+|\tau|\right)^{1/2}.$$

Через M^0p будем обозначать орт, коллинеарный оси Oy_1 и входящий внутрь тела $\Pi(M^0, h)$.

Определение 1. Пусть для граничной точки $M^0=(x^0, t_0)\in\Sigma(D)$ существует замкнутое тело (см. (3)) (или соответственно (4))

$$\overline{\Pi}_p(M^0, h_0)=\overline{\Pi}(M^0, h_0)\cap\{t\leqslant t_0\},$$

причем орт M^0p, внутренний для тела $\Pi(M^0, h_0)$, ортогонален оси Ot. Пусть параболическая граница $\Gamma(\overline{\Pi}_p(M^0, h_0))$ имеет в местной системе координат (y, τ), связанной с точкой M^0, каноническое уравнение вида

$$y_1=-|z'|_p\Omega(|z'|_p), \quad -h_0\leqslant y_1\leqslant 0 \quad \text{в случае (3)} \tag{5}$$

$$y_1=|z'|_p\Omega(|z'|_p), \quad 0\leqslant y_1\leqslant h_0 \quad \text{в случае (4)}. \tag{6}$$

Если модуль непрерывности Ω из правой части канонического уравнения (5) (соответственно (6)) удовлетворяет условию А, то скажем, что точка $M^0\in\Sigma(D)$ обладает по отношению к области D свойством строгой p-параболоидности извне (соответственно изнутри).

Теорема 1 (достаточное условие локальной регулярности по Липшицу вблизи боковой границы решения параболического уравнения 2-го порядка). *Пусть в $D\cup\gamma(D)$ определен равномерно параболический оператор* (1), *удовлетворяющий условию* (2). *Предположим, что для функции $u(x, t)$ и граничной точки $M^0\in\Sigma(D)$ выполнены условия*:

а) *функция $u(x, t)$ определена в замкнутой области $\overline{D}$, причем*

$$u\in C(\overline{D}); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t}\in C(D\cup\gamma(D)), \quad i, j=1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

$$Lu(x, t)=f(x, t), \quad (x, t)\in D\cup\gamma(D),$$

где $-F\leqslant f(x, t)\leqslant 0$, $(x, t)\in D\cup\gamma(D)$, $F>0$ постоянная;

б) *граничная точка $M^0=(x^0, t_0)\in\Sigma(D)$ обладает относительно области D свойством строгой (с условием Дини) p-параболоидности извне, причем функция из* (5) *удовлетворяет условию* А *и условию Дини*

$$0\leqslant\int_0^s z^{-1}\Omega(z)\,dz<+\infty, \quad s\in(0, s_0]; \tag{8}$$

в) *для точки $M^0\in\Sigma(D)$ существует полушаровая окрестность*

$$O_{h_0}^-(M^0)=O_{h_0}(M^0)\cap\{t\leqslant t_0\}\subset E_{n+1} \tag{9}$$

(*с центром в точке* M^0 *и радиусом* $h_0>0$) *и линейная функция*

$$l(M^0,M)=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i y_i,\quad |\alpha_i|\leqslant H_0,\quad i=2,3,\dots,n$$

(*где* $H_0>0$ *и* α_i, $i=2, 3, \dots, n$, *постоянные, а* (y, τ) — *местная система координат из определения* 1), *такие, что для граничных значений функции* $u(x, t)$ *имеет место оценка*

$$|u(M)-u(M^0)-l(M^0, M)|\leqslant\varphi(|z'|_p),$$
$$M=(y, \tau)\in\Sigma(D)\cap O_{h_0}^-(M^0), \tag{10}$$

причем функция $\varphi(s)$, *определенная на* $[0, s_0]$, *удовлетворяет условиям*

$$\varphi\in C([0, s_0]),\quad \varphi(0)=D\varphi(0)=0,\quad \varphi(s)>0,\quad s\in(0, s_0]; \tag{11}$$

г) *функция* φ *из оценки* (10) *удовлетворяет, помимо* (11), *условию*

$$0\leqslant\varphi(s)\leqslant H_1 s\Omega(s),\quad s\in[0, s_0],\quad H_1>0 \text{ постоянная}, \tag{12}$$

причем функция Ω *в* (12) *взята из условия* б).

Тогда существуют постоянные $H>0$ *и* $h\in(0, h_0]$ *такие, что для функции* $u(x, t)$ *имеет место локальная оценка Липшица вблизи граничной точки* $M^0=(x^0, t_0)\in\Sigma(D)$

$$|u(M)-u(M^0)|\leqslant H\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{t_0-t}\,\Omega(\sqrt{t_0-t})\right),$$
$$M=(x,t)\in O_h^-(M^0)\cap\bar{D}. \tag{13}$$

З а м е ч а н и е. Условие Дини (8) в требованиях теоремы 1 входит как в условие б) на боковую границу $\Sigma(D)$, так и в условия (10)—(12) из в), г), характеризующих поведение функции $u(x, t)$ на границе $\Sigma(D)$ вблизи точки $M^0\in\Sigma(D)$.

З а м е ч а н и е. Если односвязная область $D\subset E_{n+1}$ заключена между двумя гиперплоскостями $t=0$ и $t=T>0$ и боковая граница $\Sigma(D)$ есть поверхность класса $Л_{1,\alpha,\alpha/2}^{0,1,(1+\alpha)/2}$, $0<\alpha\leqslant1$ (определение см. в [7]), то, полагая в определении 1 $\Omega(s)=s^\alpha$, видим, что каждая точка $M^0\in\Sigma(D)$ обладает относительно области D свойством строгой (с условием Дини (8)) p-параболоидности как извне, так и изнутри.

Т е о р е м а 2. *Пусть в* $D\cup\gamma(D)$ *определен равномерно параболический оператор* (1), *удовлетворяющий условию* (2). *Допустим, что функция* $u(x, t)$, *определенная в* $\bar{D}$, *удовлетворяет условиям* (7) *и*

$$Lu(x, t)\leqslant0,\quad (x, t)\in D\cup\gamma(D), \tag{14}$$

$$\min_{\bar{D}} u(x, t)=\mu<0, \tag{15}$$

$$u(M^0)=\mu,\quad M^0=(x^0, t_0)\in\Sigma(D). \tag{16}$$

Предположим, что для граничной точки M^0 *из* (16) *выполнены условия:*

а) *существует полушаровая окрестность* (9) *такая, что*

$$u(M)>\mu,\quad M\in O_{h_0}^-(M^0)\cap\bar{D},\quad M\neq M^0; \tag{17}$$

б) *уравнение боковой границы* $\Sigma=\Sigma(D)\cap O_{h_0}^-(M^0)$ *имеет вид* (5) *в местной системе координат* (y, τ), *связанной с точкой* M^0, *причем* (*см.* (3)) $O_{h_0}^-(M^0)\cap\Pi(M^0, h)\subset D\cup\gamma(D)$;

в) *функция* Ω *из* (5) *удовлетворяет, помимо* A, *дополнительному условию*

$$D^2p(s)\geqslant0,\quad s\in(0, s_0);\quad s^{\gamma_0}=o(\Omega(s)),\quad s\to+0,$$

для некоторого $\gamma_0\in(0, 1]$.

Тогда для любого луча l, *выходящего из точки* M^0 *и лежащего в гиперплоскости* $t=t_0$, *с ортом* M^0l, *составляющим острый угол* β_l, $|\beta_l|<\pi/2$, *с ортом M^0p, существуют постоянные $\varepsilon_l>0$ и $h_l\in(0, h_0]$ такие, что*

$$u(M)-u(M^0)\geqslant\varepsilon_l\cos\beta_l|M^0M|\int\limits_{|M^0M|}^{s_0}z^{-1}\Omega(z)\,dz,\quad M\in l\cap O_{h_0}^{-}(M^0),\tag{18}$$

где $|M^0M|$ — обычное эвклидово расстояние.

Следствие (необходимость условия Дини (8) в требовании б) теоремы 1). *Пусть выполнены все условия теоремы 2, причем функция Ω из условия* в) *теоремы 2 такова, что*

$$\int\limits_0^{s_0}z^{-1}\Omega(z)\,dz=+\infty.\tag{19}$$

Тогда из неравенства (18) *теоремы 2 вытекает, что при любом поведении $u(x, t)$ на боковой границе $\Sigma(D)$, сохраняющем оценку* (17), *$u(x, t)$ не может удовлетворять оценке* (13) *теоремы* 1.

Теорема 3. *Пусть в $D\cup\gamma(D)$ определен равномерно параболический оператор* (1), *удовлетворяющий условию* (2). *Допустим, что функция $u(x, t)$, определенная в $\bar{D}$, удовлетворяет условиям* (7), (14)—(16), *где граничная точка $M^0=(x^0, t_0)\in\Sigma(D)$ обладает относительно области D свойством строгой р-параболоидности изнутри, причем функция Ω из* (6) *удовлетворяет условию* А. *Пусть существует полушаровая окрестность* (9), *для которой выполнено* (17) *и функция*

$$p_1(s)=s\Omega_1(s),\quad s\in[0, s_0],\tag{20}$$

такие, что

$$u(M)-\mu\geqslant p_1(|M^0M|_p),\quad M=(x, t)\in\Sigma=\Sigma(D)\cap O_{h_0}^{-}(M^0),\tag{21}$$

где $|M^0M|_p=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2+|t_0-t|}$, и функция Ω_1 из (20) *удовлетворяет условию* А *и условию*

$$\Omega(s)\cdot\int\limits_s^{s_0}z^{-1}\Omega_1(z)\,dz\leqslant H_2\Omega_1(s),\quad s\in[0, s_0],$$

$H_2>0$ — постоянная.

Пусть кусок поверхности Σ из (21) *допускает представление вида $y_1=\psi(z')$ в местной системе координат (y, τ), связанной с точкой M^0.*

Тогда для любого луча l, выходящего из точки M^0 и лежащего в гиперплоскости $t=t_0$ с ортом M^0l, составляющим острый угол β_l с ортом M_p^0, существуют постоянные $\varepsilon_l>0$ и $h_l\in(0, h_0]$ такие, что

$$u(M)-u(M^0)\geqslant\varepsilon_l\cos\beta_l|M^0M|\int\limits_{|M^0M|}^{s_0}z^{-1}\Omega_1(z)\,dz,\quad M\in l\cap O_{h_l}^{-}(M^0).\tag{22}$$

Следствие (необходимость условия Дини (8) в требованиях в) и г) теоремы 1). *Пусть выполнены все условия теоремы 3, причем функция $\Omega_1(s)$ из* (20) *удовлетворяет условию* (19); *тогда из оценки* (22) *теоремы 3 вытекает, что $u(x, t)$ не может удовлетворять оценке* (13) *теоремы* 1.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко*, ДАН, т. 204, № 3, 529 (1972). [2] *Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко*, Сибирск. матем. журн., т. 14, № 1, 86 (1973). [3] *Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко*, В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, «Наука», 1973. [4] *Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко*, ДАН, т. 212, № 3, 544 (1973). [5] *Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко*, Сибирск. матем. журн., т. 15, № 2, 343 (1974). [6] *Е. М. Ландис*, Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, «Наука», 1971. [7] *Л. И. Камынин*, Дифференциальные уравнения, т. 1, № 6, 799 (1965).