Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.544 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. КАЦ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕГОМЕОМОРФНЫМ СДВИГОМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 27 V 1974)

Пусть L — контур Ляпунова, т. е. замкнутая простая гладкая кривая, касательная к которой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно длины дуги кривой.

Рассмотрим класс $M^n(L)$ отображений $\alpha(t)$ L на себя, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\alpha(t)$ дифференцируемо, $\alpha'(t)\in H(L)$ (удовлетворяет условию Гёльдера) и $\alpha'(t)\neq 0$, $t\in L$; 2) каждая точка $t\in L$ имеет ровно n различных прообразов на L; 3) $\alpha(t)$ локально не меняет ориентации.

Отметим, что требование гладкости L существенно: если L' — кусочно-гладкая кривая с конечным числом углов, то класс $M^n(L')$ при $n>1$ пуст.

Пусть D^+ и D^- — соответственно конечная и бесконечная области, ограниченные L. Рассмотрим следующую задачу.

Найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, регулярные в D^+ и D^- и непрерывные в $\bar{D}^-$ и $\bar{D}^-$ соответственно и удовлетворяющие на L условию

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{1}$$

где $\alpha\in M^n(L)$, G, $g\in H(L)$, $G(t)\neq 0$, $t\in L$.

При $n=1$ это задача Газемана [1-3]; известно, что она конформно эквивалентна задаче Римана. Если $n>1$, то конформная склейка посредством однолистных функций не может привести к задаче Римана; однако задачу (1) можно свести к совокупности задачи Римана и некоторого дополнительного условия. Для этого изучим структуру класса $M^n(L)$.

Фиксируем точку $t_0\in L$ и рассмотрим уравнение

$$\alpha(t)=\alpha(t_0).$$

Пусть его n решений суть $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ и они разбивают L на n непересекающихся открытых дуг $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, не содержащих решений этого уравнения. Нетрудно показать, что α взаимно однозначно отображает любую из дуг Λ_j, $j=1, \ldots, n$, на $L - \{\alpha(t_0)\}$. Отсюда можно вывести следующую теорему.

Теорема 1. *Если α_1, $\alpha_2\in M^n(L)$, то найдется такое $\gamma\in M^1(L)$, что $\alpha_2=\alpha_1\circ\gamma$.*

Пусть $\sigma(z)$ осуществляет конформное отображение D^+ на единичный круг. Обозначим $a(z)=\sigma^{-1}[\sigma^n(z)]$, $z\in D^+$, $\alpha_0(t)=a(t)|_{t\in L}$. Очевидно, $\alpha_0\in M^n(L)$. Тогда, согласно теореме 1, $\alpha=\alpha_0\circ\beta$, $\beta\in M^1(L)$. Обозначим $\Phi^+[a(z)]=\Psi^+(z)$, $z\in D^+$, $\Phi^-(z)=\Psi^-(z)$, $z\in D^-$. Тогда, если Φ^+, Φ^- удовлетворяют (1), то Ψ^+, Ψ^- удовлетворяют условию

$$\Psi^+[\beta(t)]=G(t)\Psi^-(t)+g(t). \tag{1a}$$

Задача (1а) есть задача Газемана, но она не эквивалентна задаче (1).

Лемма 1. *Пусть функция $\psi(z)$ регулярна в D^+; для того чтобы она была представима в виде $\psi(z)=\varphi[a(z)]$, $a(z)=\sigma^{-1}[\sigma^n(z)]$, где φ — регу-*

лярная в D^+ функция, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\psi[h(z)]=\psi(z), \tag{2}$$

где $h(z)=\sigma^{-1}[e^{i\cdot 2\pi/n}\sigma(z)]$.

Отсюда ясно, что задача (1) эквивалентна совокупности задачи (1а) и условия

$$\Psi^+[h(z)]=\Psi^+(z). \tag{2a}$$

Условие (2а) является условием инвариантности функции Ψ^+ относительно преобразований n-членной циклической группы, порожденной h.

Применим теперь к задаче (1а) метод конформной склейки, как это сделано в [1]. Сначала решим вспомогательную задачу

$$\omega^+[\beta(t)]=\omega^-(t), \qquad t\in L,$$

при условии, что $\omega^-(z)$ имеет на бесконечности разложение $\omega^-(z)=z+$ $+c_1/z+\ldots$; она имеет единственное решение, при этом ω^+ и ω^- отображают D^+ и D^- соответственно на D_1^+ и D_1^-, $D_1^+\cap D_1^-=\phi$, $\partial D_1^+=\partial D_1^-=L_1$, ω^+ и ω^- однолистны, а $(\omega^+)'$ и $(\omega^-)'$ H-непрерывны. Рассматривая такие регулярные в областях D_1^+, D_1^- функции $\Omega^+(z)$, $\Omega^-(z)$, что $\Psi^-(z)=$ $=\Omega^+[\omega^+(z)]$, $\Psi^-(z)=\Omega^-[\omega^-(z)]$, получаем эквивалентность задачи (1а) задаче

$$\Omega^+(t)=G_1(t)\Omega^-(t)+g_1(t), \quad t\in L_1, \tag{1б}$$

где $G_1(t)=G[(\omega^-)^{-1}(t)]$, $g_1(t)=g[\omega^-)^{-1}(t)]$.

Условие (2а) оказывается равносильным

$$\Omega^+[k(z)]=\Omega^+(z); \tag{2б}$$

здесь $k=\omega^+\circ h\circ(\omega^+)^{-1}$, т. е. $k(z)=\zeta[e^{i\cdot 2\pi/n}\zeta^{-1}(z)]$, где $\zeta(z)=\omega^+[\sigma^{-1}(z)]$ — конформное отображение единичного круга на D_1^+.

Итак, задача (1) эквивалентна задаче Римана (1б) с условием (2б), являющимся условием инвариантности Ω^+ относительно циклической группы, порожденной $k(z)$.

Обратимся сначала к однородной задаче (1б), (2б), т. е. положим $g_1(t)\equiv g(t)\equiv 0$. Ясно, что $G_1(t)$ есть H-непрерывная функция и $\mathrm{Ind}_{L_1}G_1=$ $=\mathrm{Ind}_L G=\varkappa$. При $\varkappa<0$ задача неразрешима.

Пусть теперь $\varkappa\geqslant 0$. Решения Ω^+ задачи (1б) при $g_1(t)\equiv 0$ образуют линейное пространство K размерности $\varkappa+1$ с базисом $\{z^m e^{\Gamma^+(z)}\}_{m=0}^{\varkappa}$, где

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\ln[(\tau-\zeta(0))^{-\varkappa}G_1(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Тогда решения задачи (1б), (2б) образуют его линейное подпространство K_1, а решения задачи (1) — линейное пространство K^*, изоморфное K_1. Пусть размерность K^* и K_1 есть $l\leqslant\varkappa+1$. Ясно, что величина $r=\varkappa+1-l$ является размерностью пространства линейных комбинаций функций $\{A_m\}_{m=0}^{\varkappa}$, $A_m(z)=[k(z)]^m e^{\Gamma^+[k(z)]}-z^m e^{\Gamma^+(z)}$. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1) является

$$\det[A_{mq}]_{m,q=0}^{\varkappa}(z)\equiv 0, \tag{3}$$

где $A_{m0}\equiv A_m(z)$, $A_{mq}\equiv A_m^{(q)}(z)$ при $q=1,\ldots,\varkappa$.

Имеем также

$$l=\varkappa+1-\mathrm{rank}\,(A_{mq})_0^{\varkappa}. \tag{4}$$

Далее заметим, что всякий базис K_1 имеет вид $\{P_m(z)e^{\Gamma^+(z)}\}_{m=1}^{l}$, где $P_1,\ldots,P_l$ — линейно-независимые полиномы. Если $L[P_m]_1^l$ — пространство линейных комбинаций этих полиномов, то всякое решение (1б), (2б) имеет вид $P(z)e^{\Gamma^+(z)}$, где $P\in L[P_m]_1^l$. Нетрудно показать, что среди степеней полиномов из $L[P_m]_1^l$ ровно l различных: $0\leqslant\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_l\leqslant\varkappa$.

Лемма 2. *Среди базисов пространства $L[P_m]_1^l$ есть такой $\{P_m^*\}_{m=1}^{l}$ что:* 1) *степень P_m^* есть δ_m, $m=1,\ldots,l$;* 2) *если $Q_m=(P_m^*, P_1^*)$ — наибольший общий делитель P_m^* и P_1^*, $m=1,\ldots,l$, то Q_m делится на Q_{m+1} при $m=1,\ldots,l$.*

Предположим $l\geqslant 2$ и рассмотрим решения $\{P_m^* e^{\Gamma^+(z)}\}_{m=1}^{l}$ и их отношения $R_m(z)=P_m^*(z)/P_1^*(z)$, $m=2,\ldots,l$. Согласно (2б) имеем $R_m\circ k=R_m$, а согласно лемме 2 степени рациональных функций R_m попарно различны.

Обозначим $\mathfrak{R}$ поле рациональных функций от z и рассмотрим его подполе $\mathfrak{R}[k]=\{R\in\mathfrak{R}\colon R\circ k=R\}$. Оно содержит такой элемент ρ (функцию Люрота, см. ([4])), что

$$\mathfrak{R}[k]=\{R\in\mathfrak{R}\colon R=R^*\circ\rho,\ R^*\in\mathfrak{R}\}. \tag{5}$$

Функция ρ определяется с точностью до дробно-линейного преобразования, но степени всех функций Люрота подполя $\mathfrak{R}[k]$ совпадают.

Введем понятие степени Люрота функции k $\nu[k]$ следующим образом: если $\mathfrak{R}[k]$ есть поле констант, то положим $\nu[k]=\infty$; если же $\mathfrak{R}[k]$ содержит элементы, отличные от констант, а степень его функций Люрота есть ν, то $\nu[k]=\nu$.

При $l\geqslant 2$ построенные выше функции R_m принадлежат $\mathfrak{R}[k]$ и $R_m\neq\mathrm{const}$, $m=2,\ldots,l$. Таким образом, $l\geqslant 2$ влечет $\nu[k]<\infty$. Из (5) следует, что степени R_m, $m=2,\ldots,l$, делятся на $\nu[k]$. Так как они попарно различны, имеем

$$l\leqslant 1+[\varkappa/\nu]. \tag{6}$$

Очевидно, это верно и при $\nu=\nu[k]=\infty$.

Циклическая группа преобразований D_1^+ на себя, порожденная k, имеет порядок n. Исходя из этого, нетрудно доказать, что $\nu[k]\geqslant n$. Отсюда

$$l\leqslant 1+[\varkappa/\nu]\leqslant 1+[\varkappa/n]. \tag{7}$$

Если $\nu[k]<\infty$, то среди функций Люрота подполя $\mathfrak{R}[k]$ найдется функция положительного порядка p. Тогда порядки всех остальных функций Люрота этого подполя принимают значения p, 0, $-p$. Назовем число p порядком Люрота функции k: $p[k]=p$. Если $\nu[k]=\infty$, положим $p[k]=\infty$. Точно так же, как неравенство (9), доказывается

$$l\leqslant 1+(\delta_l-\delta_1)/p, \tag{8}$$

причем все величины $(\delta_m-\delta_1)/p$, $m=2,\ldots,l$, являются целыми.

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathfrak{R}(k)$ содержит хотя бы один полином. Из теоремы Нётер ([4]) следует, что необходимым и достаточным условием этого является

$$p[k]=\nu[k]<\infty. \tag{9}$$

Можно показать, что если выполняются условия (3) и (9), то

$$l=1+[(\varkappa-\delta_1)/p], \tag{10}$$

и $\delta_m=\delta_1+p(m-1)$, $m=1,\ldots,l$.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (1). Обозначим

$$\tilde{\Omega}(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

где $X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}$, $X^-(z)=(z-\zeta(0))^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}$.

Если $\varkappa<0$, то $\tilde{\Omega}(z)$ является единственным решением задачи (1б) при выполнении $-\varkappa-1$ условий

$$\int\limits_{L_1}\frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{m-1}\,d\tau=0,\quad m=1,\ldots,-\varkappa-1. \tag{11}$$

Оно будет решением (1б), (2б) при выполнении еще одного условия

$$B_0(z)\equiv\tilde{\Omega}^+[k(z)]-\tilde{\Omega}^+(z)\equiv 0. \qquad (12)$$

Если $\varkappa\geqslant 0$, то для существования решений задачи (1б), (2б) необходимо и достаточно, чтобы B_0 были линейной комбинацией функций $\{A_m(z)\}_{m=0}^{\varkappa}$. Среди них r линейно-независимых: $A_{m_1},\dots,A_{m_r}$. Обозначим $B_j=A_{m_j}$, $j=1,\dots,r$, тогда условие разрешимости можно записать в виде

$$\det[B_{ij}]_{i,j=0}^{r}(z)\equiv 0, \qquad (13)$$

где $B_{i0}=B_i$, $i=0,\dots,r$, $B_{ij}=B_i^{(j)}$, $j=1,\dots,r$.

Теорема 2. *Пусть индекс задачи* (1) *есть* $\varkappa$, $|\varkappa|<\infty$, *степень Люрота функции* k *есть* $\nu\leqslant\infty$, *а порядок Люрота этой функции равен* $p\leqslant\infty$. *Тогда:*

1) *при* $\varkappa<0$ *однородная задача, соответствующая задаче* (1), *неразрешима, а задача* (1) *разрешима при выполнении* $-\varkappa$ *условий* (11), (12), *причем имеет единственное решение;*

2) *при* $\varkappa\geqslant 0$ *однородная задача, соответствующая задаче* (1), *разрешима, если выполнено условие* (3); *в таком случае ее решения образуют линейное пространство, размерность которого* l *удовлетворяет* (4), (7), (8), *а если выполняется* (9) — *то и* (10). *Задача* (1) *разрешима, если выполнено условие* (13); *если при этом* (3) *не выполняется, то ее решение единственно, если же* (3) *имеет место, то ее решения образуют* l*-параметрическое семейство, где* l — *размерность пространства решений соответствующей однородной задачи.*

Условиям $\nu[k]<\infty$ и $p[k]=\nu[k]<\infty$ можно дать геометрическую интерпретацию. Заметим, что $\zeta(0)$ есть неподвижная точка функции $k(z)$ и $k'[\zeta(0)]=e^{i\cdot 2\pi/n}$.

Теорема 3. *Пусть функция* $k(z)$ *регулярна и однолистна в области* D, $a\in D$ *есть ее неподвижная точка и* $[k'(a)]^n=1$ *при каком-то целом* n.

Тогда необходимым и достаточным условием выполнения соотношения $\nu[k]<\infty$ (*или* $p[k]=\nu[k]<\infty$) *является существование такой рациональной функции (соответственно полинома)* $R(z)$, *что* $R(a)=0$ *и функция* $k(z)$ *отображает на себя содержащую точку* a *связную компоненту множества* $\{z\colon |R(z)|\leqslant c_0\}$, *где* c_0 *фиксировано настолько малым, что эта компонента лежит в* D *и не содержит нулей* R, *отличных от* a. *Если при этом степень функции* R *есть* λ, *а порядок* $q>0$, *то* $\nu[k]\leqslant n\lambda$, $p[k]\leqslant nq$.

Автор выражает признательность Л. А. Аксентьеву и Л. И. Чибриковой за ценные обсуждения и содействие работе.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
8 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М., 1923. [2] *Э. Н. Зверович, Г. С. Литвинчук*, УМН, т. 23, 3 (141) (1968). [3] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [4] *Н. Г. Чеботарев*, Теория алгебраических функций, М.– Л., 1948.