Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 534.222.550.344 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

А. П. КИСЕЛЕВ

О ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ В НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 4 VI 1974)

Со времени создания лучевого метода в теории упругости стоял вопрос о выборе начальных данных (дифракционных коэффициентов) — функций, постоянных вдоль лучей, — для лучевых формул, описывающих поля точечных источников. Заметка посвящена решению этой задачи во всех приближениях. Использована методика пограничного слоя, соединяющая приемы [1] с аппаратом «лемм единственности» [2].

1. Рассматривается стационарная постановка задачи. Смещения $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)$ изотропной упругой среды описываются уравнениями Ламе

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}-\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}+\mathrm{grad}\,\mu\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{U}+ \\ +\mathrm{rot}(\mathbf{U}\times\mathrm{grad}\,\mu)+\mathrm{grad}(\mu\,\mathrm{grad}\,\mathbf{U})- \\ -\mathbf{U}\Delta\mu+\rho\omega^2\mathbf{U}=\mathbf{F}. \tag{1}$$

Предполагается, что параметры Ламе $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ и плотность $\rho(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируемы, а векторнозначная обобщенная функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ сосредоточена в точке $\mathbf{x}=0$.

Формальным высокочастотным, $\omega\to\infty$, решением уравнений Ламе в области D будем называть ряд такой, что n-я частичная сумма его дает при подстановке в (1) невязку, допускающую равномерную в D оценку $o(\omega^{-p})$ для любого фиксированного $p>0$, если n достаточно велико. Нас интересуют решения, отвечающие расходящимся из точки источника $\mathbf{x}=0$ волнам. Временная зависимость выбрана в виде $e^{-i\omega t}$.

2. Построим по коэффициентам системы (1) центральные поля исходящих из $\mathbf{x}=0$ лучей продольной и поперечной волн. В области, где эти поля регулярны, построенные по ним известные лучевые разложения суть формальные решения при условии

$$|\mathbf{x}|>\mathrm{const}\,\omega^{-1+\varepsilon},\quad \varepsilon>0. \tag{2}$$

3. Рассмотрим источник типа сосредоточенного импульса

$$\mathbf{F}=\delta(\mathbf{x})\mathbf{h}; \tag{3}$$

$\mathbf{h}\neq0$ — постоянный вектор, $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция. Любая обобщенная функция с точечным носителем $\mathbf{x}=0$ получается из (3) дифференцированием и заменой $\mathbf{h}$.

Вблизи $\mathbf{x}=0$ вводятся растянутые координаты $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$,

$$\mathbf{X}=\omega\mathbf{x} \tag{4}$$

и формальное решение ищется в виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},\omega)\sim\omega\sum_{s\geq0}\frac{\mathbf{V}_s(\mathbf{X})}{\omega^s}, \tag{5}$$

причем предполагается, что векторы $\mathbf{V}_s(\mathbf{X})$ зависят только от $\mathbf{X}$.

Разложив функции λ, μ, ρ в ряду Тейлора по X_1, X_2, X_3, подставив (5) в (1) и собрав члены с одинаковыми степенями ω, получим рекуррентную систему задач для оператора $\mathbf{L}_0$ с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{L}_0\mathbf{V}_0=\delta(\mathbf{X})\mathbf{h},$$
$$\mathbf{L}_0\mathbf{V}_0=\sum_{s=0}^{j-1}\mathbf{L}_{j-s}\mathbf{V}_s, \tag{6}$$

$\mathbf{V}_l$ удовлетворяет условию излучения, $l\geqslant 0$;

здесь

$$\mathbf{L}_0\mathbf{V}=\rho_0\mathbf{V}+(\lambda_0+2\mu_0)\,\mathrm{grad}_{\mathbf{X}}\,\mathrm{div}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{V}-\mu_0\,\mathrm{rot}_{\mathbf{X}}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{V},$$
$$\rho_0=\rho(0),\quad \lambda_0=\lambda(0),\quad \mu_0=\mu(0),$$

а операторы $\mathbf{L}_m$ дифференциальные 2 порядка относительно $\mathbf{X}$ с полиномиальными по X_1, X_2, X_3 коэффициентами. Неоднородность среды рассматривается, таким образом, как малое возмущение.

Решения $\mathbf{V}_l$ уравнений (6) можно найти явно. Структура их такова:

$$\mathbf{V}_l=e^{i\alpha|\mathbf{X}|}\mathbf{W}_{al}+e^{i\beta|\mathbf{X}|}\mathbf{W}_{bl}, \tag{7}$$
$$\alpha=\sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda_0+2\mu_0}},\quad \beta=\sqrt{\frac{\rho_0}{\mu_0}},$$

где компоненты векторов $\mathbf{W}_{al}$ и $\mathbf{W}_{bl}$ суть конечные суммы однородных относительно $\mathbf{X}$ функций целых степеней, имеющие оценку $O(|\mathbf{X}|^{2l-1})$ при $|\mathbf{X}|\to\infty$. Гладкость векторов $\mathbf{V}_l$ растет с номером. Ряд (5) служит формальным решением (1) в области

$$|\mathbf{x}|<\mathrm{const}'\,\omega^{-1/2-\varepsilon'},\quad \varepsilon>0. \tag{8}$$

4. В слое $\Omega(\varepsilon,\varepsilon',\omega)$, определяемом неравенствами (2), (8), где формальными решениями (1) служат и «локальное» разложение (5), и лучевые, последние перестраиваются. Функции λ, μ, ρ, геометрические расхождения и осциллирующие множители раскладываются в ряды вблизи $\mathbf{X}=0$, причем в показателях экспонент удерживаются нулевые члены разложений эйконалов: $\alpha|\mathbf{X}|$ и $\beta|\mathbf{X}|$.

Лучевые решения принимают после этой перестройки вид, аналогичный (5), (7), с той разницей, что компоненты векторов, играющих теперь роль $\mathbf{W}_{as}$ и $\mathbf{W}_{bs}$ в (7), могут содержать присоединенные функции

$$\mathbf{W}_{cs}=\sum_{l\leqslant n<+\infty}\mathbf{W}_{cs}^{(l)},\quad \mathbf{W}_{cs}^{(l)}=|\mathbf{X}|^l\sum_{m\geqslant 0}\mathbf{\Phi}_{cs}^{(lm)}\left(\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}\right)\ln^m\frac{|\mathbf{X}|}{\omega}, \tag{9}$$

$\mathbf{\Phi}_{cs}^{(lm)}$ — векторные функции, гладкие на единичной сфере, а индекс c заменяет a или b.

В промежуточной области $\Omega(\varepsilon,\varepsilon',\omega)$ перестроенные лучевые ряды суть формальные решения. Отсюда следует, что члены их удовлетворяют в Ω рекуррентной системе вида (6) и, следовательно, определены с точностью до решения однородного уравнения

$$\mathbf{L}_0\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega(\varepsilon,\varepsilon',\omega). \tag{10}$$

5. Ряд вида (9), удовлетворяющий формально уравнению (10), однозначно определяется, если заданы выражения $(\mathbf{W}_{as},\ \mathrm{grad}_{\mathbf{X}}|\mathbf{X}|)$ и $\mathbf{W}_{bs}^{(-1)}-(W_{bs}^{(-1)},\quad \mathrm{grad}_{\mathbf{X}}|\mathbf{X}|)\,\mathrm{grad}_{\mathbf{X}}|\mathbf{X}|,\ s=0,1,2,\ldots.$

Благодаря этой лемме единственности, аналогичной ([2]), из сшивания разложений п. 4 с перестроенными лучевыми рядами могут быть однозначно найдены начальные данные всех приближений для продольных и поперечных волн.

Доказывается, что асимптотика лучевых рядов при $\mathbf{x} \to 0$ в действительности не содержит логарифмических членов.

Приведем два конкретных результата, полученных по этой схеме.

6. Источник типа центра вращения с осью $\mathbf{l}$,

$$\mathbf{F} = -\mathrm{rot}_{\mathbf{x}}[\mathbf{l}\delta(\mathbf{x})], \tag{11}$$

не возбуждает в однородной среде продольной волны $\mathbf{U}^a$, в неоднородной же

$$\mathbf{U}^a \sim \sqrt{\frac{a}{\rho J}} \frac{\psi(\mathbf{s})\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\tau}{i\omega} e^{i\omega\tau},$$

$$\psi = ([\mathbf{p} \times \mathbf{s}], \mathbf{l})\sqrt{\sin\theta}, \quad \mathbf{p} = \left.\frac{\frac{2}{a^2}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\,\mu - \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\,\rho}{4\pi\rho^{3/2}(b^2-a^2)}\, a^{1/2}\right|_{\mathbf{x}=0}; \tag{12}$$

здесь J — расходимость, τ — эйконал продольной волны, a и b — продольная и поперечная скорости, функция ψ постоянна на продольных лучах; лучи параметрированы касательными к ним в точке $\mathbf{x}=0$ единичными векторами $\mathbf{s}=(s_1, s_2, s_3)$. В сферических координатах $0 \leqslant \eta < 2\pi$, $0 \leqslant \theta < \pi$

$$s_1 = \sin\theta \sin\eta, \quad s_2 = \sin\theta\cos\eta, \quad s_3 = \cos\theta. \tag{13}$$

Поперечная волна имеет порядок $O(1)$, $\omega \to \infty$.

7. Источник типа центра расширения

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\,\delta(\mathbf{x})$$

порождает (не возникающую в однородной среде) поперечную волну

$$\mathbf{U}^b \sim \frac{\chi(\mathbf{s})}{i\omega\sqrt{\rho b J}} e^{i\omega\tau}$$

$$\chi(\mathbf{s}) = (\mathbf{q} - (\mathbf{q}, \mathbf{s})\mathbf{s})\sqrt{\sin\theta}, \quad \mathbf{q} = \left.\frac{\frac{2}{b^2}\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\,\mu - \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\,\rho}{4\pi\rho^{3/2}(b^2-a^2)}\right|_{\mathbf{x}=0}; \tag{14}$$

здесь J — расходимость, а τ — эйконал поперечной волны. Продольная волна имеет порядок $O(1)$.

Автор приносит благодарность В. М. Бабичу за постановку задачи, указание основной идеи решения ее и интерес к работе.

Ленинградский технологический институт
им. Ленсовета

Поступило
30 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. S. S. Avila, J. B. Keller*, Comm. Pure and Appl. Math., v. 16, № 1, 38 (1963).
[2] *В. М. Бабич, С. А. Егоров*, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, в. 12, Л., 1973, стр. 4.