Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 519.3:62-50

МАТЕМАТИКА

В. В. ВЕЛИЧЕНКО

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМАКСА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 29 V 1974)

1°. Рассматриваемая в настоящем сообщении задача о минимаксе на траекториях управляемой динамической системы изучалась рядом авторов. Не претендуя на полноту обзора, укажем здесь посвященные исследованию необходимых условий оптимальности в этой задаче работы А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина, В. Ф. Демьянова, И. В. Гирсанова, В. Н. Малоземова и Т. К. Виноградовой ([1-6]) и работы, посвященные разработке численных алгоримов ее решения на основе метода динамического программирования Р. Беллмана ([7]) и метода вспомогательных функционалов ([8]). В работах ([2], [5], [6]) для построения численных алгоритмов предложено использовать необходимые условия оптимальности.

В настоящем сообщении формулируются достаточные условия минимакса в целом. Помимо общего для задач оптимизации значения достаточных условий при решении целого ряда вопросов, в частности, при интерпретации численных решений, в рассматриваемой задаче минимакса они имеют еще и специальный интерес в связи с обсуждением имеющихся в настоящее время различных (неравносильных ([5], [6])) необходимых условий оптимальности. Из результатов настоящей работы следует, что приведенные ниже необходимые условия, формулируемые при помощи использованных впервые в изучаемой задаче А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным ([1]) множителей Лагранжа и содержащие в качестве главного элемента принцип максимума Л. С. Понтрягина ([9]), являются максимально сильными в том смысле, что для получения с их помощью глобальных достаточных условий оптимальности они должны быть дополнены условиями, относящимися уже не к отдельно взятой изучаемой экстремали, а к характеристике взаимного расположения экстремалей в рассматриваемой области в целом.

Предлагаемый подход является развитием метода поля экстремалей в достаточных условиях оптимальности ([10-12]).

2°. Постановка задачи. Заданы n-мерная система уравнений

$$\dot{x}(t)=f(x, u, t) \tag{1}$$

и функционалы

$$J_i(u)=\Phi_i[x(T), T], \qquad i=1, 2, \ldots, l. \tag{2}$$

Левый конец траектории системы (1) $\{x^0, T_0\}$ фиксирован, правый должен принадлежать многообразию M, задаваемому условиями

$$M_j(x, t)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, m\leqslant n. \tag{3}$$

Требуется найти управление $u=u(t)$, стесненное ограничением $u\in U$, минимизирующее функционал

$$J(u)=J(x^0, T_0; u)=\Phi[x(T), T]=\max_i \{\Phi_i[x(T), T]\}. \tag{4}$$

Предполагается, что функции Φ_i и M_j непрерывны вместе с частными производными первого порядка и имеют ограниченные частные производные второго порядка по всем переменным; $f(x, u, t)$ обладает этими свойствами по переменным x, u и непрерывна по t *; допустимые управления $u(t)\in U$ кусочно-непрерывны.

3°. Необходимые условия оптимальности. Необходимые условия оптимальности будем получать, рассматривая области достижимости в пространстве вариаций функционалов (2) и граничных условий (3) ([13]). Объединение приведенных ниже результатов с результатами работ ([13, 14]) позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности для широкого круга минимаксных задач, в том числе таких, где конечные точки $\{x(T_i), T_i\}$ для функционалов (2) определяются каждая своей группой условий вида (3).

Построим вспомогательный функционал

$$\Psi[x(T),T]=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\Phi_i[x(T),T]+\sum_{j=1}^{m}\mu_jM_j[x(T),T]. \tag{5}$$

Обозначим через J^* минимальное значение функционала (4) и через R — множество индексов i, для которых на оптимальной траектории $\Phi_i[x(T), T]=J^*$. Рассмотрим множество достижимости D в $(l+m)$-мерном векторном пространстве, по осям координат которого откладываются $\delta\Phi_i$ и δM_j.

Пользуясь, как в ([9]), многоточечными игольчатыми вариациями, можно показать, что D выпукло. Для оптимальной траектории конус K, описываемый неравенствами $\delta\Phi_i\leqslant 0$, $i\in R$, $\delta M_j=0$, не может иметь внутренних точек, общих с D, поэтому существует опорная гиперплоскость к D с коэффициентами λ_i, μ_j такими, что $\lambda_i\geqslant 0$ для $i\in R$ и $\lambda_i=0$ для $i\notin R$. Выберем множители λ_i и μ_j в (5) равными указанным коэффициентам. Тогда для (5) на оптимальной траектории выполнено условие $\delta\Psi\geqslant 0$. Используя, в свою очередь, для вычисления $\delta\Psi$ формулу для приращения функционала ([15, 12]), приходим к следующему утверждению (в такой форме необходимые условия оптимальности могут быть получены также из результатов работы ([1])), выражающему собой принцип максимума в форме множителей Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ оптимальны в задаче* (1) — (4).

Тогда существуют такие, не равные одновременно нулю числа $\lambda_i\geqslant 0$ ($\lambda_i=0$ для $i\notin R$), μ_j, что для функции $p(t)$, определяемой системой уравнений

$$\dot p(t)=-\nabla_x H(x, p, u, t), \quad H=(p, f(x, u, t)), \quad p(T)=-\nabla_x\Psi[x(T), T], \tag{6}$$

выполнены условия

$$H(x, p, u, t)=\sup_{v\in U} H(x, p, v, t), \qquad T_0\leqslant t<T, \tag{7}$$

$$-H[x(T), p(T), u(T-0), T]+\partial\Psi[x(T), T]/\partial T=0. \tag{8}$$

Всякую траекторию системы (1), удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем экстремалью и обозначим $\tilde x(t)=\tilde x(x^0, T_0; t)$. Управление, соответствующее экстремали, обозначим $\tilde u(t)=\tilde u(x^0, T_0; t)$.

4°. Поле экстремалей. Пусть задана область $A\subset X\times t$. Построим в A семейство $\tilde X$ экстремалей $\tilde x$, выпустив из каждой точки $\{\xi, \tau\}\in A$ экстремаль $\tilde x(\xi, \tau; t)$. Используя далее для обозначения относящихся к экстремалям величин знак ~, получаем, что в A на семействе $\tilde X$ определены опорная функция $\tilde V(\xi, \tau)=\Psi[\tilde x(\xi, \tau; \tilde T(\xi, \tau)), \tilde T(\xi, \tau)]$, синтезирующее управление $\tilde u(\xi, \tau)$, функции $\tilde R(\xi, \tau)$, $\tilde\lambda_i(\xi, \tau)$ и $(n+1)$-мерная функция наклона

$$\tilde p(\xi, \tau), \tilde H(\xi, \tau)=(\tilde p(\xi, \tau), f[\xi, \tilde u(\xi, \tau), \tau]). \tag{9}$$

---

* Случай разрывных правых частей системы (1) рассматривается с помощью скачков вектора сопряженных переменных, как в ([12]).

Будем говорить, что семейство $\tilde{X}$ с функцией наклона (9) образует в A L-непрерывное поле экстремалей, если существуют такие константы α и β, что для всех $\{\xi', \tau'\}$, $\{\xi'', \tau''\}\in A$ соответствующие экстремалям $\tilde{x}(\xi', \tau'; t)$ и $\tilde{x}(\xi'', \tau''; t)$ управления $\tilde{u}'(t)$ и $\tilde{u}''(t)$ и конечные моменты времени $\tilde{T}'$ и $\tilde{T}''$ при $|\{\xi', \tau'\}-\{\xi'', \tau''\}|\leqslant\varepsilon$ удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{\max\{\tau', \tau''\}}^{\min\{\tilde{T}', \tilde{T}''\}} |\tilde{u}'(t)-\tilde{u}''(t)|\,dt\leqslant\alpha\varepsilon, \qquad |\tilde{T}'-\tilde{T}''|\leqslant\beta\varepsilon.$$

5° Точная формула для приращения функционала. Пусть $\hat{x}(t)$ — целиком лежащая в A траектория системы (1) с концами $\{\hat{x}(T_0), T_0\}=\{x^0, T_0\}$ и $\{\hat{x}(\hat{T}), \hat{T}\}\in M$, соответствующая допустимому управлению $\hat{u}(t)$. Через

$$\Delta J=\Phi[\hat{x}(\hat{T}), \hat{T}]-\Phi[\tilde{x}(x^0, T_0; \tilde{T}), \tilde{T}] \tag{10}$$

обозначим разность между значениями функционала (4) для $\hat{x}(t)$ и для экстремали $\tilde{x}$ с началом в $\{x^0, T_0\}$.

Если для каждой $\tilde{x}(\xi, \tau; t)\in\tilde{X}$ в условиях теоремы 1 $\lambda_i>0$ для $i\in\in\tilde{R}(\xi, \tau)$, мы можем нормировать множители λ_i, μ_j так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i=\sum_{i\in\tilde{R}(\xi,\tau)}\tilde{\lambda}_i(\xi, \tau)=1, \qquad \{\xi, \tau\}\in A. \tag{11}$$

Тогда из (4), (5) и определения опорной функции $\tilde{V}(\xi, \tau)$ имеем

$$J(\xi, \tau; \tilde{u})=\Phi[\tilde{x}(\xi, \tau; \tilde{T}(\xi, \tau)), \tilde{T}(\xi, \tau)]=$$
$$=\Psi[\tilde{x}(\xi, \tau; \tilde{T}(\xi, \tau)), \tilde{T}(\xi, \tau)]=\tilde{V}(\xi, \tau). \tag{12}$$

Использование представления (12) и условия (11) позволяет применить для изучения функционала (4) в целом аппарат точных формул для приращения функционала ([11], [12]). Для рассматриваемой задачи при предположениях теоремы 2 справедливы все результаты теоремы работы ([11]) (леммы 1 работы ([12])). Мы ограничимся здесь формулировкой результата, необходимого при обсуждении достаточных условий оптимальности.

Теорема 2. *Пусть в A поле экстремалей L-непрерывно, выполнено условие* (11) *и* $\tilde{R}[\hat{x}(t), t]$ *как функция от t кусочно-постоянна.*

Тогда справедлива формула

$$\Delta J=-\int\limits_{T_0}^{\hat{T}}\{H[\hat{x}, \tilde{p}(\hat{x}, t), \hat{u}(t), t]-H[\hat{x}, \tilde{p}(\hat{x}, t), \tilde{u}(\hat{x}, t), t]\}\,dt. \tag{13}$$

6°. Достаточные условия оптимальности. Из формулы (13) и условия максимума (7) следует, что при выполнении условий теоремы 2 для любой целиком принадлежащей A траектории $\hat{x}(t)$ системы (1)

$$\Phi[\hat{x}(\hat{T}), \hat{T}]\geqslant\Phi[\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}].$$

Это неравенство доказывает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть в A поле экстремалей L-непрерывно, $\tilde{\lambda}_i(x, t)>0$ для $i\in\tilde{R}(x, t)$ и $\tilde{R}[x(t), t]$, как функция от t, кусочно-постоянная вдоль любой допустимой траектории $x(t)$.*

Тогда каждая экстремаль, целиком принадлежащая A, доставляет в A для любой своей точки в качестве фиксированных начальных данных на левом конце абсолютный минимум функционалу (4) *при условиях* (3).

Теорема 3 определяет принципиальные свойства поля экстремалей и допустимого закона смены максимальных функционалов вдоль траекторий сравнения, при которых имеет место оптимальность в целом. Для приложений большее значение имеет следующее ее обобщение, в доказательстве которого, проводимом как в ([12]), используются установленные в ([16]) свойства взаимного расположения траекторий дифференциальных уравнений и кусочно-гладких множеств.

Теорема 4. *Пусть множество точек нарушения свойства L-непрерывности поля экстремалей и множество точек разрыва функции* $\tilde{R}(x, t)$ *представляют собой кусочно-гладкие множества размерности не большей* n *и опорная функция* $\tilde{V}(x, t)$ *в* A *непрерывна.*

Тогда каждая экстремаль, целиком принадлежащая A, *доставляет в* A *для любой своей точки в качестве фиксированных начальных данных на левом конце абсолютный минимум функционалу* (4) *при условиях* (3) *среди траекторий системы* (1), *целиком, за исключением своих конечных точек, лежащих внутри* A.

Если в (2) $l=1$, условия теорем 1, 3 и 4 переходят соответственно в необходимые ([9], [12]) и достаточные ([12]) условия оптимальности в задаче минимизации единственного функционала.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
14 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 5, № 3 (1965). [2] *В. Ф. Демьянов*, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7 (1966). [3] *И. В. Гирсанов*, Лекции по математической теории экстремальных задач, М., 1970. [4] *В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов*, Введение в минимакс, «Наука» (1972). [5] *Т. К. Виноградова, В. Ф. Демьянов*, ДАН, т. 213, № 3 (1973). [6] *Т. К. Виноградова, В. Ф. Демьянов*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 14, № 1 (1974). [7] *Р. Беллман*, Динамическое программирование, М., 1960; Процессы регулирования с адаптацией, М., 1964. [8] *В. В. Величенко*, Канд. дисс. МФТИ, 1966; Космические исследов., т. 10, № 5 (1972). [9] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др.*, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [10] *В. В. Величенко*, ДАН, т. 182, № 4 (1968). [11] *В. В. Величенко*, ДАН, т. 207, № 4 (1972). [12] *В. В. Величенко*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 14, № 1 (1974). [13] *В. В. Величенко*, ДАН, т. 174, № 5 (1967). [14] *В. В. Величенко*, ДАН, т. 176, № 4 (1967). [15] *Л. И. Розоноэр*, Автоматика и телемехан., т. 20, № 10 (1959). [16] *В. Г. Болтянский*, Математические методы оптимального управления, М., 1966.