Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 551.465.11

ГЕОФИЗИКА

А. А. КОРДЗАДЗЕ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 12 V 1974)

Теоремы единственности решений как линейных, так и квазилинейных задач динамики океана в различных постановках рассматривались в ряде работ ([1-8]). В настоящей работе доказывается единственность классического решения квазилинейной трехмерной бароклинной задачи динамики океана, когда в уравнениях учитываются квазилинейные члены, а также члены, описывающие вертикальную и горизонтальную турбулентность, диффузию тепла и солей.

Пусть Ω — ограниченная область цилиндрической формы с осью параллельной оси z (ось z направлена вниз), а Γ — ее гладкая граница. Обозначим через $\mathbf{u}=(u, v, w)$ вектор скорости, где u и v — горизонтальные составляющие вектора по направлениям осей x и y соответственно, w — вертикальная составляющая по оси z, а через T, S, P и ρ — отклонение температуры, солености, давления и плотности от средних по глубине значений физических величин соответственно. Тогда, следуя ([5]), систему уравнений, описывающую движение бароклинной жидкости, можно записать в виде

$$\begin{gathered}
u_t+\operatorname{div}\mathbf{u}u-l(x,\ y)v+P_x/\bar\rho=\mu\Delta u+(\nu(z)u_z)_z,\\
v_t+\operatorname{div}\mathbf{u}v+l(x,y)v+P_y/\bar\rho=\mu\Delta v+(\nu(z)v_z)_z,\\
T_t+\operatorname{div}\mathbf{u}T+\gamma_T w=\mu_1\Delta T+(\nu_1(z)T_z)_z,\\
S_t+\operatorname{div}\mathbf{u}S+\gamma_S w=\mu_2\Delta S+(\nu_2(z)S_z)_z,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\qquad P_z=g\rho,\qquad \rho=\alpha_T T+\alpha_S S,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\bar\rho=\mathrm{const}$ — среднее значение плотности воды; l — параметр Кориолиса, μ и ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости для компонент скорости течения u и v; μ_1, μ_2 и ν_1. ν_2 — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии тепла и солей соответственно; g — ускорение силы тяжести; $\gamma_T=\mathrm{const}$, $\gamma_S=\mathrm{const}$; $\alpha_T=\mathrm{const}$, $\alpha_S=\mathrm{const}$; Δ — плоский оператор Лапласа; $\alpha_T/\gamma_T>0$, $\alpha_S/\gamma_S>0$.

В качестве граничных и начальных условий для системы (1) возмем следующие:

$$g\bar\rho w=P_t \text{ при } z=0;\qquad u=0,\qquad v=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial n_1}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial n_2}=0 \text{ на } \Sigma,\tag{2}$$

$$u=f_1,\qquad v=f_2,\qquad T=f_3,\qquad S=f_4 \text{ на } \sigma+\sigma_0;\qquad w=0 \text{ при } z=H,\tag{3}$$

$$u=u_0,\qquad v=v_0,\qquad T=T_0,\qquad S=S_0 \text{ при } t=0,\qquad P=P_0 \text{ при } t=0,\ z=0,\tag{4}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n_i}=\mu_i\frac{\partial}{\partial x}\cos(n,x)+\mu_i\frac{\partial}{\partial y}\cos(n,y)+\nu_i\frac{\partial}{\partial z}\cos(n,z),\qquad i=1,2,$$

Σ — твердая часть поверхности Γ, σ — «жидкий контур», мысленно выделенный из рассматриваемого бассейна, σ_0 — часть плоскости $z=0$, на которой поставлены кинематические условия $g\bar\rho w=P_t$, n — направление вектора внешней нормали к поверхности Γ.

Имеет место следующая

Теорема. *Если функции u, v, T, S, P непрерывно дифференцируемы по времени, u, v, T, $S \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, P, $w \in C^1(\Omega)$, то задача (1)–(4) не может иметь более одного решения.*

В самом деле, если $\{\mathbf{u}_1, T_1, S_1, P_1, \rho_1\}$ и $\{\mathbf{u}_2, T_2, S_2, P_2, \rho_2\}$ — два гладких решения задачи (1)–(4), то их разность

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2, \quad T=T_1-T_2, \quad S=S_1-S_2, \quad P=P_1-P_2, \quad \rho=\rho_1-\rho_2$$

будет удовлетворять системе уравнений

$$\begin{gathered}
u_t+\operatorname{div}\mathbf{u}_1 u+\mathbf{u}\operatorname{grad}u_2-lv+P_x/\bar{\rho}=\mu\Delta u+(\nu u_z)_z,\\
v_t+\operatorname{div}\mathbf{u}_1 v+\mathbf{u}\operatorname{grad}v_2+lu+P_y/\bar{\rho}=\mu\Delta v+(\nu v_z)_z,\\
T_t+\operatorname{div}\mathbf{u}_1 T+\mathbf{u}\operatorname{grad}T_2+\gamma_T w=\mu_1\Delta T+(\nu_1 T_z)_z,\\
S_t+\operatorname{div}\mathbf{u}_1 S+\mathbf{u}\operatorname{grad}S_2+\gamma_S w=\mu_2\Delta S+(\nu_2 S_z)_z,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}=0, \quad P_z=g\rho, \quad \rho=\alpha_T T+\alpha_S S
\end{gathered} \tag{5}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$g\bar{\rho}w=P_t \text{ при } z=0; \quad u=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial T}{\partial n_1}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial n_2}=0 \text{ на } \Sigma, \tag{6}$$

$$u=0, \quad v=0, \quad T=0, \quad S=0 \text{ на } \sigma+\sigma_0; \tag{7}$$

$$u=0, \quad v=0, \quad T=0, \quad S=0 \text{ при } t=0; \ P=0 \text{ при } t=0, \ z=0. \tag{8}$$

Умножим первые пять уравнений системы (5) соответственно на $\bar{\rho}u$, $\bar{\rho}v$, $\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}T$, $\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}S, P$ и сложим результат. Интегрируя полученное выражение по области Ω, после соответствующих преобразований с учетом граничных условий (6), (7) получим

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_\Omega \pi\, d\Omega+\frac{1}{2g\bar{\rho}}\iint_{\sigma_0} P^2\, d\sigma_0\right)+\iiint_\Omega J_1\, d\Omega=\iiint_\Omega J_2\, d\Omega, \tag{9}$$

где

$$\pi=\frac{1}{2}\left[\bar{\rho}(u^2+v^2)+\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}T^2+\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}S^2\right],$$

$$J_1=\bar{\rho}\mu[(u_x)^2+(u_y)^2+(v_x)^2+(v_y)^2]+\bar{\rho}\nu[(u_z)^2+(v_z)^2]+$$
$$+\frac{\mu_1 g\alpha_T}{\gamma_T}[(T_x)^2+(T_y)^2]+\frac{\mu_2 g\alpha_S}{\gamma_S}[(S_x)^2+(S_y)^2]+\frac{\nu_1 g\alpha_T}{\gamma_T}(T_z)^2+\frac{\nu_2 g\alpha_S}{\gamma_S}(S_z)^2,$$

$$J_2=-\left(\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}T\mathbf{u}\operatorname{grad}T_2+\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}S\mathbf{u}\operatorname{grad}S_2+\bar{\rho}u\mathbf{u}\operatorname{grad}u_2+\bar{\rho}v\mathbf{u}\operatorname{grad}v_2\right). \tag{10}$$

Далее имеем

$$\left|\iiint_\Omega J_2\, d\Omega\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\left\{\iiint_\Omega\left[\bar{\rho}(u^2+v^2+2|uv|)+\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}(|uT|+|vT|)+\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}(|uS|+|vS|)\right]d\Omega+\right.$$
$$\left.+\iiint_\Omega\left[\bar{\rho}(|uw|+|vw|)+\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}|wT|+\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}|wS|\right]\right\}d\Omega. \tag{11}$$

где C — максимум абсолютных значений первых производных от функций u_2, v_2, T_2 и S_2. Обозначим через J_3^{uv} сумму слагаемых в (11), не содержащих w. На основании неравенства $2|ab|\leqslant a^2+b^2$ после соответствующих преобразований получим

$$J_3^{uv}\leqslant C\gamma\iiint_\Omega \pi\, d\Omega, \quad \gamma=4+\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}+\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}. \tag{12}$$

Произведем теперь оценку тех слагаемых в (11), которые содержат w. Учитывая тот факт, что $w=0$ при $z=H$, имеем

$$w=-\int_{z}^{H(x,y)} w_{z_1}\,dz_1,$$

а из уравнения неразрывности с учетом последнего равенства получаем

$$w=\int_{z}^{H(x,y)} (u_x+v_y)\,dz_1.$$

Имеем

$$|uw|\leqslant\left|u\int_{z}^{H(x,y)}(u_x+v_y)\,dz_1\right|\leqslant|u|\cdot\left|\int_{z}^{H(x,y)}(u_x+v_y)\,dz_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant|u|\int_{z}^{H(x,y)}(|u_x|+|v_y|)\,dz_1\leqslant|u|\int_{0}^{H(x,y)}(|u_x|+|v_y|)\,dz_1\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon u^2+\frac{1}{4\varepsilon}\left[\int_{0}^{H(x,y)}(|u_x|+|v_y|)\,dz_1\right]^2\leqslant\varepsilon u^2+\frac{H(x,y)}{4\varepsilon}\left[\left(\int_{0}^{H(x,y)}(u_x)^2dz_1\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{0}^{H(x,y)}(v_y)^2\,dz_1\right)^{1/2}\right]^2\leqslant\varepsilon u^2+\frac{H(x,y)}{2\varepsilon}\int_{0}^{H(x,y)}[(u_x)^2+(v_y)^2]\,dz_1.$$

Здесь мы воспользовались следующими неравенствами:

$$4\varepsilon|ab|\leqslant4\varepsilon^2a^2+b^2,\qquad (a^2+b^2)\leqslant2(a^2+b^2),\qquad \varepsilon>0,$$

$$\int_{0}^{H}|ab|\,dz_1\leqslant\left(\int_{0}^{H}a^2\,dz_1\right)^{1/2}\left(\int_{0}^{H}b^2\,dz_1\right)^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\iiint_{\Omega}\bar\rho|uw|\,d\Omega\leqslant2\varepsilon\iiint_{\Omega}\bar\rho\,\frac{u^2}{2}\,d\Omega+\bar\rho\,\frac{H_0^{\,2}}{2\varepsilon}\iiint_{\Omega}\Phi\,d\Omega,\tag{13}$$

где

$$H_0=\max_{x,\,y}H(x,\,y),\qquad \Phi=(u_x)^2+(v_y)^2.$$

Аналогично получаем

$$\iiint_{\Omega}\bar\rho|vw|\,d\Omega\leqslant2\varepsilon\iiint_{\Omega}\bar\rho\,\frac{v^2}{2}\,d\Omega+\frac{\bar\rho H_0^{\,2}}{2\varepsilon}\iiint_{\Omega}\Phi\,d\Omega,\tag{14}$$

$$\iiint_{\Omega}\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}\,|wT|\,d\Omega\leqslant2\varepsilon\iiint_{\Omega}\frac{g\alpha_T}{\gamma_T}\,\frac{T^2}{2}\,d\Omega+\frac{g\alpha_TH_0^{\,2}}{2\gamma_T\varepsilon}\iiint_{\Omega}\Phi\,d\Omega,\tag{15}$$

$$\iiint_{\Omega}\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}\,|wS|\,d\Omega\leqslant2\varepsilon\iiint_{\Omega}\frac{g\alpha_S}{\gamma_S}\,\frac{S^2}{2}\,d\Omega+\frac{g\alpha_SH_0^{\,2}}{2\gamma_S\varepsilon}\iiint_{\Omega}\Phi\,d\Omega.\tag{16}$$

В силу (12), (13)–(16) получаем

$$\left|\iiint_\Omega J_2\,d\Omega\right| \leqslant \alpha\iiint_\Omega \pi\,d\Omega + \frac{C_1}{\varepsilon}\iiint_\Omega \Phi\,d\Omega, \tag{17}$$

где

$$\alpha = C\gamma + 2\varepsilon, \quad C_1 = \frac{H_0^2}{2}\left(2\bar{\rho} + \frac{g\alpha_T}{\gamma_T} + \frac{g\alpha_S}{\gamma_S}\right).$$

Подберем ε так, чтобы удовлетворялось неравенство $\bar{\rho}\mu\varepsilon > C_1$. Тогда на основании (9) и (17) будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_\Omega \pi\,d\Omega + \frac{1}{2g\bar{\rho}}\iint_{\sigma_0} P^2\,d\sigma_0\right) - \alpha\iiint_\Omega \pi\,d\Omega \leqslant 0. \tag{18}$$

С учетом однородных начальных условий (8) из (18) получим

$$\iiint_\Omega \pi\,d\Omega + \frac{1}{2g\bar{\rho}}\iint_{\sigma_0} P^2\,d\sigma_0 \leqslant 0,$$

откуда непосредственно заключаем, что $\pi = 0$ в Ω и $P = 0$ на σ_0, тем самым следует $u = 0$, $v = 0$, $T = 0$, $S = 0$ в Ω.

Подставляя $T = 0$, $S = 0$ в выражение для ρ, из (1) находим, что $\rho = 0$ в Ω, а из уравнения неразрывности имеем $w = 0$ в Ω. Из первых двух уравнений движения и из уравнения статики получаем $P = \mathrm{const}$, но, так как $P = 0$ на σ_0, значит, и $P = 0$ в Ω.

Теорема единственности аналогично доказывается также для ряда других постановок задачи динамики океана (см. ([8])).

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность акад. Г. И. Марчуку за постановку задачи и ряд полезных замечаний.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. В. Овсянников*, Теорема единственности для линеаризированной системы уравнений океана. Препринт НГУ, 1966. [2] *Г. И. Марчук*, ДАН, т. 176, № 1, 80 (1967). [3] *О. А. Ладыженская,* Математические вопросы в динамике вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», 1970. [4] *М. А. Бубнов, А. В. Кажихов,* ДАН, т. 198, № 4, 801 (1971). [5] *Г. И. Марчук,* Численное решение задач динамики атмосферы и океана на основе метода расщепления, Новосибирск, 1972. [6] *В. П. Кочергин,* О единственности решения задачи динамики бароклинного океана. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1973. [7] *А. А. Кордзадзе,* Расчет основных характеристик циркуляции бароклинного моря. Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1973. [8] *А. А. Кордзадзе,* О единственности решения квазилинейных задач динамики океана. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1974.