Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.949.8 *МАТЕМАТИКА*

А. П. КОРОСТЕЛЕВ

О МЕТОДЕ СЕТОК ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1974)

Пусть D — односвязная область на плоскости с границей $\partial D \in C^3$ и замыканием $\bar{D}$; $l(x) \in C^3$ — векторное поле, заданное на границе ∂D. Предполагается, что $l(x)$ касательно к ∂D на множестве M, состоящем из конечного числа точек. Введем векторное поле

$$l_1(x) = \begin{cases} l(x), & \text{если} \quad (l(x), n(x)) \geqslant 0, \\ -l(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $n(x)$ — вектор внутренней нормали к ∂D. Расщепим каждую точку $P \in M$ на две: P' и P'' («стороны» точки P).

Окрестность γ (на границе ∂D) точки P разобьется на окрестности γ' и γ'' сторон P' и P''. Сторона P' точки P называется положительной (отрицательной), если $(\overrightarrow{xP}, l_1(x)) > 0$ (<0) при $x \in \gamma'$. Точка P называется положительной, нулевой или отрицательной в соответствии с тем, имеет ли она две, одну или ни одной положительной стороны.

Обозначим положительные точки через $p_1, \ldots, p_{n+}$; отрицательные — через $\mu_1, \ldots, \mu_{n-}$. Полагаем, что $n_+ - n_- \geqslant 2$.

Пусть $f(x) \in C^3(\bar{D})$, $\varphi(x) \in C^3(\partial D)$. Рассмотрим две краевые задачи.

Краевая задача А. Найти функцию $u(x)$ такую, что

$$\Delta u(x) = f(x); \tag{1}$$

$$\partial u / \partial l|_{\partial D} = \varphi(x); \tag{2}$$

$$u(p_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, n_+, \quad a_i \text{ — заданные величины.} \tag{3}$$

Краевая задача В. Найти непрерывное в $\bar{D}$ решение $u(x)$ задачи (1), (2), принимающее в $n_+ - n_-$ положительных точках (без ограничения общности можно считать их точками $p_1, \ldots, p_{n_+-n_-}$) заданные значения:

$$u(p_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, n_+ - n_-. \tag{3'}$$

Вопросы разрешимости и гладкости решений этих краевых задач исследованы в [1, 2]. Нам понадобятся следующие факты: решение краевой задачи А существует при любых a_i.

Это решение, вообще говоря, разрывно в отрицательных точках. Если ввести локальную систему координат $x_1 \mu_i x_2$, направив ось $\mu_i x_1$ по касательной к ∂D, $\mu_i x_2$ — по направлению $n(\mu_i)$, и записать $x = x_1 + ix_2$, то разрывная компонента решения имеет вид: (величина скачка по границе) $\times \arg(x)$. С точностью до разрывных компонент решение достаточно гладкое в $\bar{D}$. Решение краевой задачи В существует не при всех a_i, но если $u(x)$ существует, то $u(x) \in C^4(\bar{D})$.

Для нахождения численного решения задачи (1), (2) предлагалось строить сетку, которая в окрестности каждой особой точки имеет вид прямой сетки [3]. Такая сетка «аннулировала» особенности решения. В этой связи возникают два вопроса, рассматриваемые в настоящей работе: 1) как будет вести себя решение сеточной задачи на регулярной (не сгущающейся у особой точки) сетке в том случае, когда соответствующее решение задачи (1) — (3) имеет особенности? 2) можно ли находить непрерывные в $\bar{D}$ решения с помощью регулярной сетки?

Предположим, что в некоторой U_i — окрестности отрицательной точки μ_i, $i=1,\ldots,n_-$, граница ∂D прямолинейна, т. е. задается в локальной системе координат $x_1\mu_i x_2$ уравнением $x_2=0$. Введем в окрестностях квадратные сетки с шагом h, поставив в соответствие каждой точке с координатами (kh, lh) узел (k,l), каждой стороне μ_{i1} и μ_{i2} отрицательной точки μ_i поставив в соответствие узел μ_{i1}^d и μ_{i2}^d.

Предположим, что вне $\bigcup_{i=1}^{n_-} U_i$ сетка определена произвольно так, что узлы образуют h-сеть в области $\bar{D}$.

Обозначим через L^h и l^h разностные операторы, аппроксимирующие оператор Δ и оператор граничного условия $\partial/\partial l$ с порядком аппроксимации $O(h)$. В окрестности любой из отрицательных точек полагаем

$$L^h \overset{h}{u}_{k,l}=h^{-2}[(\overset{h}{u}_{k+1,l}+\overset{h}{u}_{k-1,l}+\overset{h}{u}_{k,l+1}+\overset{h}{u}_{k,l-1})-4\overset{h}{u}_{k,l}];\quad (k,l)\neq(0,1),$$

$$L^h \overset{h}{u}_{0,1}=h^{-2}[(\overset{h}{u}_{1,1}+\overset{h}{u}_{-1,1}+\overset{h}{u}_{0,2}+{}^1/_2\overset{h}{u}_{\mu_{i1}^d}+{}^1/_2\overset{h}{u}_{\mu_{i2}^d})-4\overset{h}{u}_{0,1}].$$

В этой же окрестности граничный оператор в неособой точке аппроксимируем следующим образом:

$$l^h\overset{h}{u}_{k,0}=\begin{cases} h^{-1}[(\cos\alpha-\sin\alpha)\overset{h}{u}_{k+1,0}+\sin\alpha\overset{h}{u}_{k+1,1}-\cos\alpha\overset{h}{u}_{k,0}], & 0\leqslant\alpha\leqslant\pi/4;\\ h^{-1}[(\sin\alpha-\cos\alpha)\overset{h}{u}_{k,1}+\cos\alpha\overset{h}{u}_{k+1,1}-\sin\alpha\overset{h}{u}_{k,0}], & \pi/4\leqslant\alpha\leqslant\pi/2,\end{cases}$$

где $\alpha=\alpha_{k,0}$ — угол между вектором $l_1(kh,0)$ и осью $\mu_i x_1$.

Для $\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi$ имеем аналогичные выражения через

$$\overset{h}{u}_{k-1,0},\quad \overset{h}{u}_{k-1,1}\quad\text{и}\quad \overset{h}{u}_{k,1}.$$

Граничный оператор в отрицательной точке приближаем так:

$$l^h\overset{h}{u}_{\mu_{i1}^d}=h^{-1}(\overset{h}{u}_{-1,0}-\overset{h}{u}_{\mu_{i1}^d}),\qquad l^h\overset{h}{u}_{\mu_{i2}^d}=h^{-1}(\overset{h}{u}_{1,0}-\overset{h}{u}_{\mu_{i2}^d}).$$

Для любого множества $A\subseteq\bar{D}$ обозначим через A^d совокупность узлов, соответствующих точкам множества A.

С каждой из краевых задач свяжем разностную задачу:

Задача А. Исследовать разрешимость системы

$$L^h\overset{h}{u}_{x^d}=f_{x^d},\qquad x^d\in D^d,\qquad f_{x^d}=f(x);\tag{4}$$

$$l^h\overset{h}{u}_{x^d}=\pm\varphi_{x^d},\qquad x^d\in\partial D^d,\qquad \varphi_{x^d}=\varphi(x),\tag{5}$$

где знак $\pm$ берется в зависимости от знака в $l_1(x)=\pm l(x)$, с дополнительными уравнениями

$$\overset{h}{u}_{p_i^d}=a_i,\quad i=1,\ldots,n_+,$$

и сходимость решения этой системы к решению краевой задачи А.

Задача В. Исследовать разрешимость системы (4), (5) с дополнительными уравнениями:

$$\overset{h}{u}_{p_i^d}=a_i,\quad i=1,\ldots,n_+-n_-;$$

$$\overset{h}{u}_{\mu_{i1}^d}=\overset{h}{u}_{\mu_{i2}^d},\quad i=1,\ldots,n_-,$$

и сходимость решения этой системы к решению краевой задачи В.

Обозначим для любого $\varepsilon>0$ через U_ε $h^{1/2-\varepsilon}$-окрестность множества отрицательных точек.

Теорема 1. а) *Решение разностной задачи* А *существует при всех* $h>0$.

б) *Решение u^h при $h\to 0$ сходится к решению $u(x)$ краевой задачи А равномерно по множеству $\partial D+D\setminus U_\varepsilon$.*

Теорема 2. *Пусть величины a_i в условиях (3′) таковы, что существует единственное решение краевой задачи* В. *Тогда:*

а) *При достаточно малых h решение u^h разностной задачи* В *существует и единственно.*

б) *Имеет место сходимость $u_{x^d}{}^h \xrightarrow[h\to 0]{} u(x)$, равномерная по $\overline{D}$.*

Доказательства этих теорем мы не приводим ввиду их громоздкости. Укажем только, что эти доказательства основаны на детальном исследовании поведения решения разностной задачи А в окрестностях отрицательных точек. Приведем основные леммы, описывающие поведение решения в этих окрестностях.

Рассмотрим в окрестности U_i точки μ_i квадрат $B=\{|x_1|<\varkappa;\ x_2<2\varkappa\}$, где $\varkappa$ — достаточно малая величина. Обозначим $\Gamma_0=\partial D\cap\partial B$, $\Gamma=\partial B\setminus\Gamma_0$. Заметим, что в квадрате B $|L^h \arg(kh, lh)|\leqslant \dfrac{h^{-2}}{[k^2+l^2]^2}$. Поэтому особенности решения $u(x)$ краевой задачи А «переходят» в правую часть разностных уравнений в виде функций $g_i(x)=\dfrac{h^2}{[\rho(x,\mu_i)]^4}$. Следующая лемма является основной при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Рассмотрим в области $\overline{B}^d$ разностную задачу*

$$L^h \overset{h}{u}_{k,l}=-\overset{h}{g}_{k,l},\qquad \overset{h}{g}_{k,l}=g_i(kh,lh); \tag{6}$$

$$l^h\overset{h}{u}_{k,l}|_{\Gamma_0{}^d}=0; \tag{7}$$

$$u^h|_{\Gamma^d}=0. \tag{8}$$

а) *Для любого $\varepsilon>0$ равномерно по множеству $\partial B^d+B^d\setminus U_\varepsilon{}^d$*

$$\lim_{h\to 0} \overset{h}{u}_{k,l}=0.$$

б) *Для скачка* $R^h=\overset{h}{u}_{\mu_{i1}^d}-\overset{h}{u}_{\mu_{i2}^d}$ *справедлива оценка*

$$|R^h|\leqslant Kh\ln h^{-1},$$

где $K>0$ — некоторая постоянная.

Доказательство леммы 1, в свою очередь, основано на проверке следующего утверждения:

Лемма 2. *Пусть c натуральное, такое, что $C=\{|x_1|<ch,\ 0<x_2<ch\}\subseteq B$. Обозначим через χ^C индикатор множества C^d.*

Рассмотрим на множестве $\overline{B}^d$ три разностных задачи:

$$L^hu^h=-h^{-2}\chi^C,\qquad l^hu^h|_{\Gamma_0{}^d}=0,\qquad u^h|_{\Gamma^d}=0;$$

$$L^hv^h=-h^{-2}\chi^C,\qquad v^h|_{\Gamma_0{}^d}=0,\qquad v^h|_{\Gamma^d}=0;$$

$$L^hw^h=-h^{-2}\chi^C,\qquad \overset{h}{w}_{k,0}={}^1/_2w_{k,1}+{}^1/_4\overset{h}{w}_{k-1}+{}^1/_4\overset{h}{w}_{k+1,0},\qquad w^h|_{\Gamma^d}=0.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ и любого достаточно малого $\gamma>0$ существуют $h_0(\varepsilon)$ и $c_0(\gamma)$ такие, что для всех $h\leqslant h_0$ и $c_0\leqslant c\leqslant h^{-\varepsilon}$ для решения u^h на множестве $\overline{B}^d$ выполнена оценка

$$\overset{h}{u}_{k,l}\leqslant \nu hc^{1+\gamma}\overset{h}{w}_{k,l}+(1-\nu hc^{1+\gamma})\overset{h}{v}_{k,l},$$

где $\nu>0$ — некоторая постоянная.

Замечание о скорости сходимости.

а) Для задачи А скорость сходимости есть $\max\{O(h),\ O(u_i^h)\}$, где u_i^h — решение задачи (6) — (8). Ясно, что сходимость неравномерна относительно точки области и ухудшается по мере приближения к множеству отрицательных точек. Однако для точек границы ∂D можно гарантировать равномерную сходимость со скоростью $O(h \ln h^{-1})$ (ср. с леммой 1б)).

б) В случае сходимости к классическому решению в теореме 2 можно гарантировать скорость сходимости $O(h \ln h^{-1})$.

Автор выражает благодарность М. Б. Малютову за постановку задач и ценные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Б. Малютов*, Тр. Московск. матем. общ., т. 20, 173 (1969). [2] *И. Н. Векуа*, Матем. сб., т. 31 (73), 2, 217 (1952). [3] *Л. Я. Шляпочник*, Вестн. Московск. унив., № 5, сер. матем. мех., 76 (1970).