

Л. М. КУРШИН, И. Д. СУЗДАЛЬНИЦКИЙ

К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЯМИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 27 V 1974)

Задаче о напряженном состоянии цилиндрической оболочки с отверстием посвящено большое число исследований, начиная с (1). В настоящей работе изучаются представления решений этой задачи, позволяющие рассматривать оболочку, ослабленную немалым отверстием или системой отверстий.

Уравнение тонкой упругой изотропной цилиндрической оболочки записывается в виде

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} + \frac{1}{4} \mu^2 i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} z &= y + ix, \quad \bar{z} = y - ix, \quad i^2 = -1, \\ \mu^2 &= [12(1-\nu^2)]^{1/2} a^2 / (4Rh), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Psi = 12(1-\nu^2) E^{-1} h^{-3} \Phi + i [12(1-\nu^2)]^{1/2} h^{-1} w; \quad (3)$$

Φ — функция напряжений, w — прогиб оболочки, E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, R , h — радиус и толщина оболочки, a — параметр отверстия, x , y — безразмерные декартовы координаты, отнесенные к параметру a , начало координат в центре отверстия L_0 , ось x направлена вдоль оси оболочки, ось y ей ортогональна.

Частными решениями уравнения (1), исчезающими при $|z| \rightarrow \infty$, являются функции

$$\Gamma_1(z, \bar{z}) = \text{ch } p \cdot H_0^{(2)}(q), \quad (4)$$

$$\Gamma_2(z, \bar{z}) = 2\mu^{-1} i^{3/2} \text{sh } p H_0^{(2)}(q),$$

где

$$\begin{aligned} p &= 1/2 i^{3/2} \mu (z - \bar{z}), \\ q &= \mu i^{-1/2} (z \bar{z})^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

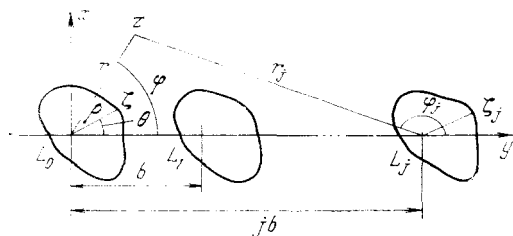


Рис. 1

Аналогичный вид (с заменой в выражении (4) функции Ханкеля $H_0^{(2)}(q)$ на функцию Бесселя $I_0(q)$) имеют решения, ограниченные при $|z| \rightarrow 0$ (2).

Решение уравнения (3) рассматривается в виде

$$\Psi(z, \bar{z}) = \Psi^\infty(z, \bar{z}) + \int \sum_{h=1}^2 \Gamma_h(z - \xi, \bar{z} - \bar{\xi}) [g_{2h-1}(\xi) + i g_{2h}(\xi)] d\xi; \quad (6)$$

здесь ξ — аффикс точки контура $L = \sum L_j$, L_j — контур j -го отверстия, $g_k(\xi)$ — действительные функции, подлежащие определению из условия на контуре отверстия, $\Psi^\infty(z, \bar{z})$ — функция, отражающая напряженное состояние на бесконечности. При растяжении σ и кручении τ

$$\begin{aligned} \Psi^\infty(z, \bar{z}) &= (4\nu_1)^{-1} \text{Re} [(\sigma + i\tau) z^2 + \sigma z \bar{z}], \\ \nu_1 &= E h^3 / [12(1-\nu^2) a^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть оболочка ослаблена N конгруэнтными отверстиями, центры которых лежат на оси y на расстоянии $b=2\pi R/N$ одна от другой. В полярных координатах (рис. 1).

$$\begin{aligned} z &= \zeta_j = (z - \zeta_j + \zeta) - \zeta = r_j e^{i\varphi_j} - \rho e^{i\theta}, \\ r_j &= [r^2 + j^2 b^2 - 2jb \cos \varphi]^{1/2}, \quad e^{i\varphi_j} = -(jb - r e^{i\varphi}) / r_j, \\ \omega_j &= [(z - \zeta_j)(\bar{z} - \bar{\zeta}_j)]^{1/2} = [r_j^2 + \rho^2 + 2r_j \rho \cos(\varphi_j - \theta)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Применив теорему сложения ((³), 7.15.34) для функции $H_0^{(2)}(\mu i^{-1/2} \omega_j)$ и обозначив контурные интегралы постоянными A_n, B_n , выражение (6) приводим к виду

$$\begin{aligned} \Psi(z, \bar{z}) &= \Psi^\infty(z, \bar{z}) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(\mu \sqrt{-i} r_j) \times \\ &\times [A_n \exp(\sqrt{i} \mu x) + B_n \exp(-\sqrt{i} \mu x)] e^{in\varphi_j}. \end{aligned}$$

Вторичное применение той же теоремы к функции $H_n^{(2)}(\mu \sqrt{-i} r_j) e^{in\varphi_j}$ позволяет записать решение задачи об оболочке, ослабленной по поперечному сечению периодической системой N отверстий, в виде

$$\begin{aligned} \Psi(z, \bar{z}) &= \Psi^\infty(z, \bar{z}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \exp(\mu x \sqrt{i}) + B_n \exp(-\mu x \sqrt{i})] \times \\ &\times \left\{ H_n^{(2)}(\mu r \sqrt{-i}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{2m} I_{2m-n}(\mu r \sqrt{-i}) e^{-2mi\theta} \right\} e^{in\varphi}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\lambda_{2m} = \sum_{j=1}^{N-1} H_{2m}^{(2)}(\mu j b \sqrt{-i}). \quad (9)$$

При $\lambda_{2m}=0, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, выражение (8) совпадает с представлением решения (⁴), использованным в связи с задачей о напряжениях в оболочке, ослабленной большим круговым отверстием радиуса a . Дальнейшее решение периодической задачи сводится к повторению методики работы (⁴).

Рассмотрим также приложение представления (6) к случаю периодической совокупности разрезов длины $2a$, ориентированных вдоль оси y . Растягивающие и касательные усилия в оболочке

$$T_x = \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} \Psi, \quad T_y = \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Re} \Psi, \quad S = -\nu_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \operatorname{Re} \Psi,$$

изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила

$$M_x = \nu_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \operatorname{Im} \Psi, \quad Q_x^* = \frac{\nu_2}{a} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \operatorname{Im} \Psi,$$

$$\nu_2 = \nu_1 h [12(1-\nu^2)]^{-1/2}.$$

В комплексных координатах z, \bar{z} , используя (6), эти величины можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_x + iS &= \sigma + i\tau + \nu_1 F_1(z, \bar{z}), \quad M_x = \nu_2 F_2(z, \bar{z}), \\ Q_x^* &= (i\nu_2/c) F_3(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F_l(z, \bar{z}) = \int_L \sum_{k=1}^4 \alpha_{lk}(z-\xi, \bar{z}-\bar{\xi}) g_k(t) dt, \quad l=1, 2, 3, \\ \alpha_{lk}(z, \bar{z}) = \alpha_{lk}^0(z, \bar{z}) + \beta_{lk}(z, \bar{z}). \quad (14)$$

В выражениях ядер β_{lk} — регулярные в окрестностях разрезов функции, α_{lk}^0 — сингулярные слагаемые, среди которых ненулевые

$$\alpha_{12}^0 = -\frac{2}{\pi z^2}, \quad \alpha_{14}^0 = -\frac{2}{\pi i} \left(\frac{\bar{z}}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}} \right), \quad \alpha_{21}^0 = 2 \frac{1-\nu}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2}, \\ \alpha_{23}^0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[(1-\nu) \frac{\bar{z}}{z^2} - (1+3\nu) \frac{1}{z} \right], \quad \alpha_{31}^0 = -\frac{4i}{\pi} (1-\nu) \operatorname{Im} \frac{1}{z^2}, \\ \alpha_{33}^0 = \frac{\mu^2}{2\pi} i \operatorname{Im} \left[-\frac{1-\nu}{2} \frac{\bar{z}^2}{z^2} + (3+\nu) \frac{\bar{z}}{z^2} + 2(7-\nu) \frac{1}{z} \right], \\ \alpha_{33}^0 = \frac{4}{\pi i} \operatorname{Re} \left[-(1-\nu) \frac{\bar{z}}{z^3} + \frac{2}{z^2} \right].$$

Потребовав на контурах разрезов выполнения условий

$$T_x = f_1(y), \quad S = f_2(y), \quad M_x = f_3(y), \quad Q_x^* = f_4(y) \quad (12)$$

и на бесконечности

$$T_x = \sigma, \quad s = \tau, \quad M_x = Q_x^* = 0, \quad (13)$$

получим для определения неизвестных функций $g_k(t)$ систему сингулярных уравнений

$$T_x = \sigma - \frac{2\nu_1}{\pi} \int_L \frac{g_2'(t) dt}{t-y} + \frac{2\nu_1 \mu^2}{\pi} K_1(y) = f_1(y), \\ S = \tau - 2\nu_1 g_2'(y) - \frac{4\nu}{\pi} \int_L \frac{g_4(t) dt}{t-y} + \frac{2\nu_1 \mu^2}{\pi} K_2(y) = f_2(y), \\ M_x = 4\nu_2 \left[\nu g_3(y) + \frac{1-\nu}{2\pi} \int_L \frac{g_1'(t) dt}{t-y} \right] + \frac{2}{\pi} \nu_2 \mu^2 K_3(y) = f_3(y), \\ Q_x^* = \frac{4\nu_2}{a} \left[-\frac{1-\nu}{2} g_1''(y) + \frac{\mu^2}{16} (33-\nu) g_2(y) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{g_3'(t) dt}{t-y} \right] + \\ + \frac{4\nu_2 \mu^2}{a\pi} K_4(y) = f_4(y): \quad (14)$$

здесь $K_m(y) = \int_L \sum_{n=1}^4 k_{mn}(y-t) g_n(t) dt$, причем отличные от нуля ядра $K_{mn}(\xi)$

имеют вид ($\mu \xi = \xi_1$)

$$k_{11} = -\operatorname{kei}'' \xi_1, \quad k_{12} = -\operatorname{ker}'' \xi_1 + \xi_1^{-2}, \quad k_{23} = -2\mu^{-1} \operatorname{kei}' \xi_1, \\ k_{24} = -2\mu^{-1} \operatorname{ker}' \xi_1 - 2\mu^{-1} \xi_1^{-1}, \\ k_{31} = \operatorname{ker}'' \xi_1 - \nu [\operatorname{kei} \xi_1 - \xi_1^{-1} \operatorname{ker}' \xi_1] - (1-\nu) \xi_1^{-2}, \\ k_{32} = -\operatorname{kei}'' \xi_1 - \nu [\operatorname{ker} \xi_1 + \xi_1^{-1} \operatorname{kei}' \xi_1], \\ k_{33} = \operatorname{kei} \xi_1 - 3\xi_1^{-1} \operatorname{ker}' \xi_1 - (2-\nu) \operatorname{ker}'' \xi_1 - 4(1+\nu) (\pi \xi_1^2)^{-1}, \\ k_{34} = \operatorname{ker} \xi_1 + 3\xi_1^{-1} \operatorname{kei}' \xi_1 + (2-\nu) \operatorname{kei}'' \xi_1, \quad (15)$$

($\operatorname{ker} \xi_1, \operatorname{kei} \xi_1$ — функции Кельвина).

Для иллюстрации ограничимся случаем свободного от напряжений по контуру ($f_k(y) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$) малого разреза. В разложениях ядер и неизвестных функций по степеням μ^2 будем сохранять только первые два слагаемых и найдем решение того же типа, который рассматривался в (1) в связи с задачей о малом круглом отверстии. Введя функции

$$\varphi_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{ig_n(t) - (t-z)g_n(t)}{(t-z)^2} dt, \quad (16)$$

$$\varphi_{n+2}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_{n+2}(t) dt}{t-z}, \quad n=1, 2,$$

и полагая $\varphi_k = \varphi_{k0} + \mu^2 \varphi_{k1} + \dots$, на основании (14) получим для определения последовательных приближений систему, первые четыре уравнения которой будут

$$\begin{aligned} \sigma + i\tau + 4\nu_1 [\overline{\varphi_{40}(y)} + \varphi_{20}(y)] &= 0, \\ \operatorname{Re} [(1-\nu)\varphi_{10}(y) + (1+3\nu)\varphi_{30}(y)] &= 0, \\ \operatorname{Im} [(1-\nu)\varphi_{10}'(y) + (3+\nu)\varphi_{30}'(y)] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\nu_1 [\overline{\varphi_{41}(y)} + \varphi_{21}(y)] + \nu_1 \left\{ \frac{1}{L} \int \left[\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \ln(y-t) + \gamma \right] g_{10}(t) - 4^{-1} g_{20}(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2i \frac{y-t}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln(y-t) - \gamma \right] g_{30}(t) - \frac{i}{2} (y-t) g_{10}(t) \right] dt = 0, \quad \gamma = \text{const.} \right. \end{aligned}$$

Очевидно, $\varphi_{10}(z) = \varphi_{30}(z) = 0$ ($g_{10}(y) = g_{30}(y) = 0$). Для определения остальных функций воспользуемся результатами статьи (5). Тогда

$$\varphi_{20}(z) = \frac{\sigma + i\tau}{8\nu_1} c(z), \quad \varphi_{40}(z) = \frac{\sigma - i\tau}{8\nu_1} c(z), \quad \varphi_{21}(z) = -\varphi_{41}(z) = \frac{\pi i}{128\nu_1} c(z),$$

где для единичного разреза $c(z) = z(z^2 - 1)^{-1/2} - 1$ и для периодического разреза $c(z) = \sin \frac{az}{2b} \left[\sin^2 \frac{az}{2b} - \sin^2 \frac{a}{2b} \right]^{-1/2} - 1$.

В частности, коэффициент концентрации напряжений на контуре малого разреза при растяжении оболочки на бесконечности равен $\kappa_\sigma = T_y/\sigma = -1 + \sqrt[3]{16\pi\mu^2}$ и при кручении $\kappa_\tau = T_y/\tau = -(2 + \sqrt[4]{8\pi\mu^2}) c_0(y)$, где $c_0(y) = y(1 - y^2)^{-1/2}$ или $c_0(y) = \sin \frac{ay}{2b} \left[\sin^2 \frac{a}{2b} - \sin^2 \frac{ay}{2b} \right]^{-1/2}$.

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступило
21 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Лурье, Статика тонкостенных упругих оболочек, М., 1947. ² И. П. Веква, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.-Л., 1948. ³ Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, «Наука», 1966. ⁴ I. G. Lekkerkerker, On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole, Delft, 1965. ⁵ W. T. Koiter, An Infinite Row of Collinear Cracks in an Infinite Elastic Sheet, Ing.-Arch., В. 28 (1959).