Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 517.948:513.8+519.4 МАТЕМАТИКА

И. Л. ВУЛИС

СПЕКТРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 V 1974)

1. В работе вычислен главный член спектральной асимптотики для уравнений вида

$$(-1)^l \nabla_l^* (\rho^\alpha \nabla_l u(x)) = \lambda^{-1} \rho^\beta b(x) u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

при различных краевых условиях на границе области Ω. В (1) $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$,— ограниченная область с границей S класса C^{l+1}, $l \geqslant 1$, $\rho = \rho(x)$ — расстояние от точки x до S, числовые параметры α, β — «показатели вырождения»; b — вещественная функция, непрерывная в окрестности S; через ∇_l обозначен оператор градиента порядка l, ∇_l^* — формально сопряженный оператор дивергенции.

Рассмотрен случай сильного вырождения, когда порядок убывания собственных чисел отличен от классического и коэффициент спектральной асимптотики зависит от вида краевых условий. Найдена также асимптотическая формула для спектра краевых задач со спектральным параметром в граничном условии.

Спектральная асимптотика краевых задач для вырождающихся уравнений второго порядка была получена Нординым [1] (при $\alpha=1$, $\beta=0$) и М. З. Соломяком и автором [2, 3] ($\alpha>0$). Некоторые результаты аналогичного характера были получены также Гиймо-Тесье [4, 5]. Вырождающиеся задачи второго порядка со спектральным параметром в граничном условии рассмотрены в [6].

Что касается вырождающихся задач вида (1) при $l>1$, то для них известны лишь (при $\alpha>0$, $\beta=0$) двусторонние оценки спектра, установленные И. А. Соломещем [7].

Результаты настоящей заметки получены на основе метода, предложенного в [2, 3, 6]. Этот метод применим также для исследования уравнений вида более общего, чем (1). Однако асимптотическая формула становится при этом значительно более громоздкой.

2. Задача рассматривается в вариационной постановке. При $h \geqslant 0$ и вещественном α определим квадратичную форму

$$A^l_{\alpha,h}[u] = \int_\Omega \rho^\alpha (|\nabla_l u|^2 + h|u|^2)\,dx, \qquad A_\alpha^l \overset{\text{def}}{=} A^l_{\alpha,0}. \tag{2}$$

Обозначим через $H_\alpha^l(\Omega)$ пополнение в метрике формы $A^l_{\alpha,1}$ множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, на которых форма конечна. Классы $H_\alpha^l D^k(\Omega)$, $k=1, \ldots, l$,— это подпространства в $H_\alpha^l(\Omega)$, получаемые при замыкании множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям:

$$u|_S = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}\Big|_S = 0,$$

где n — единичный вектор нормали к S. Пространство $H_\alpha^l D^l(\Omega)$ совпадает с $\overset{\circ}{H}{}_\alpha^l(\Omega)$ — замыканием в $H_\alpha^l(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$. Пространство $H_\alpha^l(\Omega)$ будем иногда обозначать $H_\alpha^l D^0(\Omega)$.

Следующие факты, по существу, хорошо известны.

Лемма 1. 1) *Если* $-1<\alpha<1$, *то пространства* $H_\alpha^l D^k(\Omega)$, $k=0, \ldots, l$, *различны.*

2) *Если* $2(l-k)-1\leqslant\alpha<2(l-k)+1$, *то* $H_\alpha^l D^k(\Omega)=H_\alpha^l D^{k+1}(\Omega)$, $k=1, \ldots \ldots, l-1$.

3) *Если* $\alpha\geqslant 2l-1$, *то все пространства* $H_\alpha^l D^k(\Omega)$ *совпадают с* $H_\alpha^l(\Omega)$.

4) *Если* $\alpha<-1$, *то все пространства* $H_\alpha^l D^k(\Omega)$ *совпадают с* $\mathring{H}_\alpha^l(\Omega)$.

Квадратичные формы (2) при любых $h>0$ определяют в $H_\alpha^l(\Omega)$ эквивалентные метрики. Если $-\infty<\alpha<1$, то эквивалентная метрика в $\mathring{H}_\alpha^l(\Omega)$ определяется также формулой A_α^l.

Пусть b — вещественная, измеримая в $\overline{\Omega}$ функция, непрерывная в окрестности S. Квадратичная форма

$$B_\beta[u]=\int_\Omega \rho^\beta b|u|^2\,dx \tag{3}$$

вполне непрерывна в пространствах $H_\alpha^l D^k(\Omega)$, $k=0, \ldots, l$, если $2l-\alpha+\beta>0$. Назовем спектральной задачей D^k, $k=0, \ldots, l$, задачу о вычислении собственных значений (последовательных экстремумов) отношения квадратичных форм

$$B_\beta[u]/A_{\alpha,h}^l[u], \quad u\in H_\alpha^l D^k(\Omega). \tag{4}$$

Из леммы 1 следует, что задача D^k, $k=1, \ldots, l-1$, определена при $-1<\alpha<2(l-k)+1$, задача D^0 определена при α, $\beta>-1$, задача D^l — при $\alpha<1$. Собственные числа и собственные функции задачи D^k при $h\geqslant 0$ удовлетворяют уравнению, аналогичному уравнению (1), с добавлением в левую часть слагаемого $h\rho^\alpha u$. Собственные функции удовлетворяют k нулевым краевым условиям, а также (при $k<l$) дополнительным естественным условиям, явный вид которых при использовании вариационного метода несуществен.

Остановимся на постановке задачи при $h=0$. В этом случае, как обычно, на функции u следует наложить дополнительные условия ортогональности (см. ([8]), где этот вопрос подробно рассмотрен для невырождающихся операторов). Например, если $b\geqslant 0$, то задача D^k, $k=0, \ldots, l-1$, есть задача о вычислении последовательных максимумов отношения $B_\beta[u]/$ $/A_\alpha^l[u]$ при условиях $u\in H_\alpha^l D^k(\Omega)$ и

$$\sum_{k\leqslant|\gamma|<l}\left|\int_\Omega \rho^\beta b u x^\gamma\,dx\right|^2=0.$$

Обозначим функции распределения положительных максимумов (отрицательных минимумов) отношения (4) через $n_+(\lambda, D^k)$ ($n_-(\lambda, D^k)$). Предположим, что выполнено условие сильного вырождения

$$(\alpha-\beta)(m-1)>2l-\alpha+\beta>0. \tag{5}$$

В этом случае (так же как и для операторов второго порядка (2, 3)) порядок роста функций $n_\pm(\lambda, D^k)$ отличается от классического порядка $\lambda^{-m/2l}$, а асимптотический коэффициент содержит интеграл по поверхности вырождения. Кроме того, в асимптотический коэффициент входит множитель, определяемый собственными значениями некоторого вспомогательного дифференциального оператора на полуоси.

Обозначим через $\mu_n=\mu_n(\alpha, \beta, l; D^k)$ последовательные максимумы отношения квадратичных форм

$$\int_0^\infty t^\beta|f|^2\,dt \Big/ \int_0^\infty t^\alpha\left(\sum_{j=0}^l C_l^j|f^{(l-j)}|^2\right)dt, \quad f\in H_\alpha^l D^k(0,\infty).$$

Числа μ_n совпадают с собственными значениями дифференциального уравнения

$$\sum_{j=0}^{l} C_l^j (-1)^{l-j} (t^\alpha f^{(l-j)})^{(l-j)} = \mu^{-1} t^\beta f, \quad 0<t<+\infty,$$

при условиях $f^{(j)}(0)=0$, $j=0, \ldots, k-1$, и дополнительных естественных условиях в нуле. Введем обозначения:

$$\theta = (m-1)\cdot(2l-\alpha+\beta)^{-1}, \tag{6}$$

$$w(\alpha, \beta, l, \theta; D^k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^\theta(\alpha, \beta, l; D^k), \quad k=0, \ldots, l. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в R^m, $m\geqslant 2$, с границей S класса C^{l+1}. Предположим, что выполнено условие* (5).

Тогда при $h\geqslant 0$, $k=0, \ldots, l$, имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda, D^k) = (2\pi)^{1-m} V_{m-1} w(\alpha, \beta, l, \theta; D^k)\cdot \int_S b_\pm^\theta\, dS, \tag{8}$$

где θ — показатель (6), *V_{m-1} — объем единичного шара в R^{m-1}.*

Замечания. 1) Формула (8) не изменится, если в любой строго внутренней подобласти заменить форму (2) на произвольную невырождающуюся дифференциальную квадратичную форму порядка l. 2) Формула вида (8) сохранится и тогда, когда вырождение происходит лишь на части границы S.

3. В этом пункте рассмотрим задачи со спектральным параметром в граничном условии (задачи Стеклова).

Обозначим через $H_\alpha^l ND^k(\Omega)$, $k=0, \ldots, l-1$, подпространства в $H_\alpha^l(\Omega)$, получаемые при замыкании множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих граничным условиям *:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \ldots = \left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}\right|_S = 0 \qquad (H_\alpha^l ND^0(\Omega) \overset{\text{def}}{=} H_\alpha^l(\Omega)).$$

Лемма 2. 1) *Если $-1<\alpha<1$, то пространства $H_\alpha^l ND^k(\Omega)$, $k=0, \ldots, l-1$, различны.*

2) *Если $2(l-k)-1\leqslant\alpha<2(l-k)+1$, то $H_\alpha^l ND^{k-1}(\Omega) = H_\alpha^l ND^k(\Omega)$, $k=1, \ldots, l-1$.*

Пусть на границе S задана вещественная измеримая функция τ. Введем обозначение:

$$\theta_c = (m-1)\cdot(2l-\alpha+1)^{-1}. \tag{9}$$

Предположим, что $\tau\in L_\gamma(S)$, где $\gamma=\theta_c$ при $\theta_c>1$, $\gamma>1$ при $\theta_c=1$, $\gamma=1$ при $\theta_c<1$. Квадратичная форма

$$T[u] = \int_S \tau |u|^2\, dS$$

вполне непрерывна в пространствах $H_\alpha^l ND^k(\Omega)$, $k=0, \ldots, l-1$. Назовем спектральной задачей ND^k, $k=0, \ldots, l-1$, задачу о вычислении собственных значений отношения квадратичных форм

$$T[u]/A_{\alpha,h}^l[u], \qquad h\geqslant 0, \quad u\in H_\alpha^l ND^k(\Omega); \tag{10}$$

---

* Если $x_0\in S$ и n_0 — единичный вектор внутренней нормали в точке x_0, то

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \left.\left[\frac{d^k u}{dt^k}(x_0+n_0 t)\right]\right|_{t=0}.$$

при $h=0$ на функции u следует наложить дополнительные условия ортогональности. Из леммы 2 следует, что задача ND^k, $k=0, \ldots, l-1$, определена при $-1<\alpha<2(l-k)-1$. Функции распределения спектра отношения (10) обозначим через $n_\pm(\lambda, ND^k)$.

Асимптотическое поведение функций $n_\pm(\lambda, ND^k)$ аналогично асимптотическому поведению функций распределения спектра отношения (4). В асимптотический коэффициент входит собственное значение задачи Стеклова на полуоси. Обозначим через $\varkappa=\varkappa(\alpha, l, ND^k)$ максимум отношения квадратичных форм

$$|f(0)|^2 \Big/ \int_0^\infty t^\alpha \left(\sum_{j=0}^{l} C_l^j |f^{(l-j)}|^2\right) dt, \quad f \in H_\alpha{}^l ND^k(0, \infty),$$

совпадающий с единственным собственным значением соответствующей задачи со спектральным параметром в граничном условии. Например, $\varkappa(\alpha, 2, ND^1)$ есть собственное значение задачи

$$(t^\alpha f'')'' - 2(t^\alpha f')' + t^\alpha f = 0, \quad 0<t<+\infty,$$

$$f'(0)=0, \quad \lim_{t\to 0}[(t^\alpha f'')' - \varkappa^{-1} f] = 0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. При $h\geqslant 0$, $k=0, \ldots, l-1$, имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{\theta_c} n_\pm(\lambda, ND^k) = (2\pi)^{1-m} V_{m-1} \varkappa^{\theta_c}(\alpha, l, ND^k) \cdot \int_S b_\pm{}^{\theta_c} dS, \tag{11}$$

где θ_c *— показатель* (9).

Замечание. Если вырождение происходит на части S_1 границы S, то при $\alpha\geqslant 0$ сохранится формула вида (11) с интегрированием по S_1.

В заключение автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
18 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. Nordin*, Arkiv Matematik, v. 10, № 1 (1972). [2] *И. Л. Вулис, М. З. Соломяк*, ДАН, т. 207, № 2 (1972). [3] *И. Л. Вулис, М. З. Соломяк*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, № 6 (1974). [4] *M. Guillemot-Teissier*, C. R., v. 277, № 15, A739 (1973). [5] *M. Guillemot-Teissier*, C. R., v. 278, № 3, A137 (1974). [6] *И. Л. Вулис, М. З. Соломяк*, Вестн. Ленингр. унив., № 19, 148 (1973). [7] *И. А. Соломещ*, ДАН, т. 144, № 4 (1962). [8] *М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк*, Функциональн. анализ, т. 4, в. 4, 1 (1970).