Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.54+573.88 МАТЕМАТИКА

М. С. ЛИВШИЦ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 27 V 1974)

Известно, что существует тесная связь между линейными системами и различными классами мероморфных в верхней полуплоскости (единичном круге) аналитических оператор-функций, являющихся передаточными функциями соответствующих систем ([1–3]). В частности, для представления одноканальных систем в виде цепочек, составленных из элементарных систем, особенно полезными оказались произведения Бляшке и их континуальные аналоги. Для многоканальных систем аналогичную роль играют мультипликативные представления J-нерастягивающих операторнозначных функций, найденные и изученные В. П. Потаповым ([4, 5]).

Однако в исследованиях М. М. Джрбашяна ([6–10]) была построена теория мультипликативных представлений фактически для сколь угодно широких классов мероморфных в круге функций, представлений, содержащих произведения Бляшке и их континуальные аналоги, участвующие в классической теореме Р. Неванлинны ([11]) лишь в качестве специального случая. В связи с этими общими представлениями мероморфных функций естественно возникает вопрос об их интерпретации с точки зрения линейных систем.

В настоящей заметке, в рамках теории операторных узлов и линейных систем, дается реализация некоторых типичных элементарных множителей теории М. М. Джрбашяна, выясняется физический смысл условий, накладываемых на эти множители. Приводится также правило (теорема 1), позволяющее реализовать в указанном ниже смысле конечное произведение $\prod_{j=1}^{n} w_j(z)$, если известна реализация каждой функции $w_j(z)$, $j=1, 2, 3, \ldots, n$.

1. Рассмотрим пару гильбертовых пространств H, E и четыре линейных непрерывных отображения: T: $H\to H$, Φ: $E\to H$, $\tilde{\Phi}$: $H\to E$, K: $E\to E$. Символ

$$L=\begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$$

будем называть линейным узлом *. Каждому узлу поставим в соответствие уравнения вида

$$X_{n+1}=Tx_n+\Phi u_n, \qquad (1)$$

$$v_n=\tilde{\Phi}x_n+Ku_n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad (2)$$

где $x_n \in H$, u_n, $v_n \in E$. Последовательность u_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, называется входом, x_n — внутренним состоянием, v_n — выходом открытой системы (2), (3) с дискретным временем $t=n$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Уравнения (1), (2) являются основными для теории линейных дискретных систем ([13]). Особый интерес представляет случай, когда вход, выход и внутреннее состояние имеют вид

$$u_n=uz^n, \quad x_n=xz^n, \quad v_n=vz^n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \qquad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1), (2), получим $x=R(z)u$, $v=S(z)u$, где $R(z)=(zI-T)^{-1}\Phi$, $S(z)=K+\tilde{\Phi}R(z)$.

* В отличие от узлов, исследованных в работах ([1, 2, 12]), операторы в линейном узле не связаны дополнительными соотношениями.

Определение. Пара отображений $R(z)\colon E\to H$, $S(z)\colon E\to E$ называется **открытой системой** $F=F(R, S)$, ассоциированной с узлом L.

Иногда удобно вместо z брать z^{-1}. Операторы $S(z)$ и $w(z)=S(z^{-1})$ называются передаточными функциями открытой системы.

Если, в частности, $H=E=C_1$ — комплексная плоскость и

$$L_0=\begin{pmatrix} \zeta, & \sqrt{1-|\zeta|^2} \\ -\dfrac{|\zeta|}{\zeta}\sqrt{1-|\zeta|^2}, & |\zeta| \end{pmatrix},\quad |\zeta|<1, \tag{4}$$

то L_0 — узел, а его передаточная функция $w(z)=S(z^{-1})$ совпадает с элементарным множителем Бляшке

$$A_0(z,\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\frac{|\zeta|}{\zeta}. \tag{5}$$

2. В теории факторизации классов N_α М. М. Джрбашяна (см. ([6]), частный случай теоремы 9.9 при $\alpha=1$) существенную роль играют множители двух типов.

Первый из них представляется в виде

$$A_1(z,\ \zeta)=A_0(z,\ \zeta)\exp(-\tilde{W}_1(z,\ \zeta)) \tag{6}$$

и удовлетворяет условию

$$M\{\log|A_1(te^{i\varphi},\zeta)|\}=\int_0^1\log|A_1(te^{i\varphi},\zeta)|dt=0. \tag{7}$$

При этом функция $\tilde{W}_1(z,\ \zeta)$ допускает представление

$$\tilde{W}_1(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_1(e^{-i\theta}z)u_0(e^{i\theta},\zeta)d\theta,\quad |z|<1, \tag{8}$$

$$S_1(z)=\frac{2}{(1-z)^2}-1,\quad u_0(re^{i\theta},\zeta)=r^{-1}\int_0^r\log|A_0(te^{i\theta},\zeta)|dt. \tag{9}$$

Второй из них

$$Q_1(z)=\exp\{\gamma S_1(z)\},\qquad \operatorname{Im}\gamma=0, \tag{10}$$

очевидно, допускает представление

$$Q_1(z)=Q_0(z)\tilde{Q}_1(z), \tag{11}$$

$$Q_0(z)=\exp\left\{\gamma\frac{1+z}{1-z}\right\},\quad \tilde{Q}_1(z)=\exp\left\{\gamma\frac{2z}{(1-z)^2}\right\}. \tag{12}$$

Из (8), (9) следует также, что

$$A_1(z,\ \zeta)=A_0(z,\ \zeta)\tilde{A}_1(z,\ \zeta), \tag{13}$$

$$\tilde{A}_1(z,\zeta)=\exp\left(1-|\zeta|-2\bar{\zeta}z\frac{|\zeta|-\zeta z}{1-\bar{\zeta}z}\right). \tag{14}$$

Определение. Линейный узел $L=\begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi} & K\end{pmatrix}$ называется **сцеплением** $L=L_1\vee L_2$ линейных узлов $L_j=\begin{pmatrix} T_j & \Phi_j \\ \tilde{\Phi}_j & K_j\end{pmatrix}$, $j=1,2$, с одинаковыми внешними пространствами $E_1=E_2=E$ и произвольными внутренними пространствами H_1, H_2, если выполнены следующие условия:

$$T=T_1P_1+T_2P_2+\Phi_2\tilde{\Phi}_1P_1,\qquad H=H_1\oplus H_2, \tag{15}$$

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2K_1,\qquad \tilde{\Phi}=K_2\tilde{\Phi}_1P_1+\tilde{\Phi}_2P_2,\qquad K=K_2K_1, \tag{16}$$

где P_1, P_2 — проекторы из H на H_1, H_2 соответственно.

Определение. Открытая система $F=F(R, S)$ называется сцеплением открытых систем $F_j(R_j, S_j)$ $(F=F_1\vee F_2)$, если имеют место соотношения $R=R_1+R_2S_1$, $S=S_2S_1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $L=L_1\vee L_2$ и системы F, F_1, F_2 ассоциированы с линейными узлами L, L_1, L_2 соответственно, то $F=F_1\vee F_2$.*

Если $\dim E=1$ и a — орт в E, то, очевидно, можно написать: $\Phi(ua)=uq$, $\widetilde{\Phi}x=(x, p)a$, $K(ua)=uka$ $(p, q, x\in H;\ u, k\in C_1)$. Передаточная функция имеет вид $S(z)=k+((zI-T)^{-1}q, p)$, $S(z)\in C_1$.

Пусть $H(t_1, t_2)$ — пространство вектор-функций $f(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, со значениями в заданном пространстве F, $\dim F<\infty$, и со скалярным произведением $(f, g)=\int\limits_{t_1}^{t_2}(f(t), g(t))_F dt$. Введем в рассмотрение семейство линейных узлов $L(t_1, t_2)$, $0\leqslant t_1<t_2\leqslant l$, полагая

$$T(t_1, t_2)f(x)=(\exp\theta(x))(Bf)(x)+\int\limits_{t_1}^{x}\exp\alpha(x-t)(f(t), p_0)_F q_0\,dt,\qquad t_1\leqslant x\leqslant t_2, \tag{17}$$

$$q(t_1, t_2)=q_0\exp\alpha(x-t_1),\quad p(t_1, t_2)=p_0\exp\alpha(t_2-x),\quad k(t_1, t_2)=\exp\alpha(t_2-t_1), \tag{18}$$

где $\theta(x)$ — функция со значениями в C_1, B — линейный оператор в F; $p_0, q_0\in F$.

Теорема 2. *Если $F(t_1, t_2)$ — семейство открытых систем, ассоциированных с семейством узлов $L(t_1, t_2)$, то для любых трех точек $0\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant l$ имеют место соотношения*

$$F(t_1, t_3)=F(t_1, t_2)\vee F(t_2, t_3)\quad \text{и}\quad L(t_1, t_3)=L(t_1, t_2)\vee L(t_2, t_3).$$

Определение. Мы будем говорить, что линейный узел L является реализацией заданной в единичном круге функции $f(z)$, если $f(z)$ совпадает с передаточной функцией ассоциированной открытой системы.

Можно показать, что передаточная функция введенного выше узла $L(t_1, t_2)$ при $t_1=0$, $t_2=l$ имеет вид

$$w(z)=S(z^{-1})=\exp\left(\alpha l+z\int\limits_0^l((I-z\exp\theta(t)B)^{-1}q_0, p_0\right)dt. \tag{19}$$

Если $F=C_1$, $B=b\in C_1$, то (19) приобретает вид

$$w(z)=\exp\left(\alpha l+zq_0\bar{p}_0\int\limits_0^l\frac{dt}{1-zb\exp\theta(t)}\right),\quad q_0, p_0\in C_1. \tag{20}$$

Чтобы получить множитель $\widetilde{A}_1(z, \zeta)$ и узел $\widetilde{L}_1$, нужно положить

$$l=1-|\zeta|,\quad \alpha=1,\quad \theta(x)=cx,\quad q_0\bar{p}_0=2c\bar{\zeta},\quad b=\bar{\zeta},\quad c=-(1-|\zeta|)^{-1}\log|\zeta|. \tag{21}$$

Образуя сцепление $L_1=L_0\vee\widetilde{L}_1$, получим следующий результат.

Теорема 3. *Множитель Джрбашяна $A_1(z, \zeta)$ вида* (13) *имеет реализацию вида*

$$T_1\{f_0, f(x)\}=\left\{\bar{\zeta}f_0, \bar{\zeta}(\exp cx)fx+2c\bar{\zeta}\int\limits_0^x\exp(x-t)f(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+f_0(-\zeta^{-1}|\zeta|\sqrt{1-|\zeta|^2}\,q_0\exp x)\right\},$$

$$q_1=\{\sqrt{1-|\zeta|^2},\ q_0|\zeta|\exp x\},\qquad p_1=\{-\zeta^{-1}|\zeta|\sqrt{1-|\zeta|^2}\exp l,\ p_0\exp(l-x)\},$$
$$k_1=|\zeta|\exp(1-|\zeta|).$$

Переходя к множителям (11), заметим, что $Q_0(z)$, $\gamma>0$, допускает реализацию вида

$$(Tf)(x)=f(x)+2\int_0^x \exp(x-t)f(t)\,dt; \quad q_{10}=\sqrt{2}\exp x, \quad p_{10}=\sqrt{2}\exp(l-x),$$

$$k_{10}=\exp\gamma, \quad 0\leqslant x\leqslant\gamma.$$

Можно также показать, что функция $\tilde{Q}_1(z)$ имеет реализацию вида (17), где $\dim F=2$, $\alpha=0$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что множитель $Q_1(z)=Q_0(z)\widetilde{Q_1(z)}$ также может быть реализован.

3. Равенство $|w(z)|=1$ при $|z|=1$ выражает для незатухающего сигнала вида (3) закон сохранения энергии: поток энергии, входящей в одноканальную систему, равен потоку энергии, выходящей из этой системы. Если же $|z|<1$, то сигнал (3) нестационарный и равенство $|w(z)|=1$ не выполняется.

Допустим, что сигнал (3) имеет случайный модуль $r=|z|$, $0\leqslant r\leqslant 1$, с постоянной плотностью распределения, а аргумент $\varphi=\arg z$ детерминирован. Тогда из (3) следует $|v|_{\text{ср}}=|w|_{\text{ср}}\cdot|u|_{\text{ср}}$, где под $|x|_{\text{ср}}$ понимается среднее геометрическое величины x:

$$|x|_{\text{ср}}=\exp\left(\int_0^1 \log|x(t)|\,dt\right). \tag{22}$$

Таким образом, для открытой системы F_1 с передаточной функцией $w(z)=A_1(z,\zeta)$ имеет место, в силу (7), сохранение потока энергии в смысле среднего геометрического (22).

В заключение отметим, что в более ранних работах М. М. Джрбашяна ([9], [10]) были введены множители, которые с точностью до постоянного (относительно z) фактора могут быть записаны в виде

$$D(z,\zeta)=A_0(z,\zeta)\exp\left\{{}^1/_2(1-|\zeta|^2)\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right\}.$$

Эти множители удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \log|D(te^{i\varphi},\zeta)|\,t\,dt\,d\varphi=0,$$

и, таким образом, здесь среднее берется в предположении, что случайными являются как $|z|$, так и $\arg z$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Множитель $D(z,\zeta)$ имеет реализацию $L=L_0\vee L'$, где L_0 — узел (4), а L' — узел вида*

$$(Tf)(x)=\zeta\left[f(x)+2\int_0^x \exp(x-t)f(t)\,dt\right], \quad f(x)\in\mathscr{L}_2(0,l), \quad l=1-|\zeta|^2,$$

$$q=\sqrt{2}\exp x, \quad p=\sqrt{2}\exp(l-x), \quad k=\exp(l).$$

К проблеме физической реализации элементарных множителей теории факторизации М. М. Джрбашяна привлек мое внимание В. П. Потапов, за что приношу ему свою искреннюю благодарность.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
16 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. С. Лившиц*, Операторы, колебания, волны, «Наука», 1966. [2] *М. С. Лившиц, А. А. Янцевич*, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, 1971. [3] *А. А. Янцевич*, Теория функций, функциональный анализ, в 17, Харьков, 1973. [4] *В. П. Потапов*, Тр. Московск. матем. общ., т. 4 (1955). [5] *А. В. Ефимов, В. П. Потапов*, УМН, т. 28, № 1 (1973). [6] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1966. [7] *М. М. Джрбашян*, Матем. сб., 79 (121), 4 (5) (1969). [8] *М. М. Джрбашян*, УМН, т. 28, № 4 (1973). [9] *М. М. Джрбашян*, Докл. АН АрмССР, т. 3, 1 (1945). [10] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, в. 2, 1948. [11] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, М.–Л., 1941. [12] *М. С. Бродский*, Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», 1969. [13] *Л. Заде, Ч. Дезоер*, Теория линейных систем, «Наука», 1970.