Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 512.8 МАТЕМАТИКА

Академик АН УССР Я. С. ПОДСТРИГАЧ, А. И. БАЛИНСКИЙ, Л. М. ЗОРИЙ

ОДИН КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛИНОМОВ

Разнообразные способы решения задачи устойчивости полиномов приводят к определенным формам необходимых и достаточных условий ([1], [2]), анализ которых усложняется с увеличением степени полинома. Здесь предлагается критерий, содержащий определители, весьма просто составляемые по коэффициентам полинома*. В комплексном случае их наивысший порядок и число равны степени полинома n, в вещественном же — примерно $[n/2]$.

Переходя от заданного полинома $f(z)$ к полиному $F(z)=f(iz)$ и учитывая известные соотношения между расположениями их корней, сформулируем теорему, являющуюся исходной при установлении результата работы.

Теорема (Эрмита — Билера). *Необходимое и достаточное условие того, что все корни полинома $F(z)=g(z)+ih(z)$ лежат по одну сторону вещественной оси, состоит в том, что корни полиномов $g(z)$ и $h(z)$ вещественны, просты и перемежаются.*

Из условия теоремы следует, что выражение $h'(z)g(z)-g'(z)h(z)$ вдоль вещественной оси сохраняет знак, не обращаясь в нуль. При этом расположение всех корней полинома $F(z)$ в верхней полуплоскости обеспечивается выполнением неравенства

$$h'(z)g(z)-g'(z)h(z)>0, \quad \operatorname{Im} z=0.$$

Приведем вначале несколько вспомогательных утверждений. Пусть $h(x)=h_0x^m+h_1x^{m-1}+\ldots+h_{m-1}x+h_m$, $h_0\neq 0$,— некоторый полином, корни которого обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Для соответствующих ему матриц

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -h_m/h_0 & -h_{m-1}/h_0 & -h_{m-2}/h_0 & \ldots & -h_2/h_0 & -h_1/h_0 \end{pmatrix},$$

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ . & . & \ldots & . \\ x_1^{m-2} & x_2^{m-2} & \ldots & x_m^{m-2} \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

имеет место ([4])

Лемма 1. *$HW=WD$, где $D=\operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — диагональная матрица с элементами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Введем матрицу

$$S_h=\begin{pmatrix} h_{m-1} & h_{m-2} & \ldots & h_1 & h_0 \\ h_{m-2} & h_{m-3} & \ldots & h_0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & . \\ h_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Матрица S_h симметризует слева каждую из матриц H^k, т. е. $(S_hH^k)^t=S_hH^k$ (t — обозначение операции транспонирования).*

* Предпосылки для установления указанного критерия содержатся в работе ([3]).

Нетрудно убедиться, что матрицы $S_h H^k$, $k=1, 2, \ldots, m$, в блочно-диагональной записи имеют вид

$$S_h H^k = \mathrm{diag}\,(H_k, H_{m-k}), \tag{1}$$

где

$$H_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -h_m \\ 0 & 0 & \ldots & -h_m & -h_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & -h_m & \ldots & -h_{m-k+3} & -h_{m-k+2} \\ -h_m & -h_{m-1} & \ldots & -h_{m-k+2} & -h_{m-k+1} \end{pmatrix},$$

$$H_{m-k} = \begin{pmatrix} h_{m-k-1} & h_{m-k-2} & \ldots & h_1 & h_0 \\ h_{m-k-2} & h_{m-k-3} & \ldots & h_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ h_1 & h_1 & \ldots & 0 & 0 \\ h_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Если корни полинома $h(x)$ вещественны и просты, то матрица S_h конгруэнтна матрице $h'(D)$, точнее $W^t S_h W = h'(D)$.*

Лемма 4. *Для произвольных полиномов $h(x)$ и $g(x)$ одинаковой степени и соответствующих им матриц H, S_h и G, S_g имеет место соотношение*

$$S_h g(H) - S_g h(G) = 0.$$

Сформулированные утверждения вместе с теоремой Эрмита — Билера позволяют установить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — полином степени n с комплексными коэффициентами, а $g(z)$ и $h(z)$ — соответственно вещественная и мнимая части полинома $f(iz)$. Для того чтобы все корни полинома $f(z)$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы в случае $\deg h(z) \geqslant \deg g(z)$ матрица $S_h g(H)$ была положительно определенной, а в случае $\deg h(z) < \deg g(z)$ матрица $S_g h(G)$ была отрицательно определенной* *.

Отметим, что с использованием представления (1) указанные в теореме 1 матрицы просто записываются через коэффициенты исходного полинома, а условия их определенности выражаются, как известно, в виде n неравенств на последовательные главные миноры.

Рассмотрим теперь случай вещественных коэффициентов. Учитывая четность вхождения переменной z в полиномы $g(z)$ и $h_1(z)$ из разложения $f(iz) = g(z) + izh_1(z)$, делаем замену $z^2 = x$ и переходим соответственно к полиномам $u(x)$ и $v(x)$, для которых, очевидно, $\deg u(x) \geqslant \deg v(x)$. Определяем соответствующие полиному $u(x)$ сопровождающую матрицу U и симметризующую ее матрицу S_u. Имеет место

Теорема 2. *Все корни полинома $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i = \bar{a}_i$, $a_0 > 0$, имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все его коэффициенты положительны, а матрица $S_u v(U)$ отрицательно определена.*

Очевидно, что при n четном матрица $S_u v(U)$ имеет порядок $n/2$, а при нечетном n — порядок $(n-1)/2$. С учетом представления (1) она так же просто выражается через коэффициенты исходного полинома $f(z)$, а условие отрицательной определенности записывается в виде соответствующей последовательности неравенств на ее главные миноры.

Львовский филиал математической физики
Института математики
Академии наук УССР

Поступило
9 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман*, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 26 (1949). [2] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, М., 1967. [3] *А. И. Балинский*, Кандидатская диссертация, Львов, 1972. [4] *А. С. Маркус, И. В. Мереуца*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 5, 1108 (1973).

* $\deg h(z)$ — обозначение степени полинома $h(z)$.