Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

Б. А. ЛИФШИЦ

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 V 1974)

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — случайные величины, связанные в цепь Маркова ([2]), причем $\mathbf{D}\xi_s<\infty$. Положим

$$S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n; \qquad F_n(x)=\mathbf{P}(S_n-\mathbf{E}S_n<x\sqrt{\mathbf{D}S_n}).$$

Во многих работах изучаются условия, гарантирующие асимптотическую нормальность распределений F_n (см., например, ([2], [3], [5–7])). Этому посвящена и настоящая заметка.

Условимся об обозначениях. Пусть Φ — функция распределения нормального закона с нулевым средним и единичной дисперсией. Предположим, далее, что в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ выделены две σ-алгебры событий: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Составим, следуя ([8], [4]), число

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B})=\sup|\mathbf{E}\xi\eta-\mathbf{E}\xi\cdot\mathbf{E}\eta|,$$

где верхняя грань берется по всем парам случайных величин (ξ, η) таким, что их дисперсии не превосходят 1, случайная величина ξ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, η — относительно $\mathcal{B}$.

Если измеримые пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ связаны переходной функцией $Q(x, B)$, то коэффициент эргодичности (см. ([2])) для Q обозначим через $\alpha(Q)$:

$$\alpha(Q)=1-\sup_{x_1,\, x_2,\, B}|Q(x_1, B)-Q(x_2, B)|.$$

Пусть μ — вероятностное распределение на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Пара (μ, Q) порождает вероятностное распределение $\mathbf{P}_\mu$ на $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Рассматривая вероятностное пространство $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mathbf{P}_\mu)$, положим

$$\beta(Q, \mu)=d(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}),$$

где

$$\overline{\mathcal{A}}=\{A\times\mathcal{Y}\}_{A\in\mathcal{A}}, \qquad \overline{\mathcal{B}}=\{\mathcal{X}\times B\}_{B\in\mathcal{B}}.$$

Заметим, что, согласно ([2]), существует такая постоянная K, что

$$\beta(Q, \mu)\leqslant K|1-\alpha(Q)|^{1/2}, \qquad \alpha(Q)\leqslant K(1-\beta(Q, \mu)).$$

2. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ связаны в однородную цепь Маркова ([6]) с фазовым пространством $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, переходной функцией $Q(x, A)$ и стационарным начальным распределением μ. Функцию переходов за n шагов обозначим Q_n.

Пусть $\mathcal{F}^s$ $(\mathcal{F}_t)$ — σ-алгебра событий, доступных наблюдению в моменты времени $k\leqslant s$ (соответственно $k\geqslant t$). Заметим, что число

$$\rho(n, s)=d(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}_{n+s})$$

не зависит от s, причем

$$\rho(n, s)\equiv\rho(n)=\beta(Q_n, \mu), \qquad \rho(m+n)\leqslant\rho(m)\rho(n).$$

В частности, если $\rho(N)<1$ при каком-либо N, то $\rho(n)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $n\to\infty$.

В работах [6, 2] установлено, что $F_n(x)\to\Phi(x)$, коль скоро $0<\mathbf{D}\xi_1<\infty$ и $\alpha(Q_N)>0$ при каком-либо N. Новые теоремы И. А. Ибрагимова позволяют усилить этот результат.

Теорема 1. *Если $0<\mathbf{D}\xi_1<\infty$ и $\rho(N)<1$ при каком-либо N, то*

$$\Delta_n=\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\to 0$$

при $n\to\infty$, причем

$$\frac{\mathbf{D}S_n}{n\sigma^2}\to 1,\quad \sigma^2=\mathbf{E}\xi_1^2+2\sum_{s>1}\mathbf{E}\xi_1\xi_2,\quad \sigma^2>0.$$

Предположим теперь дополнительно, что $|\xi_1|<C$ при некотором $C>0$. Из теорем С. В. Нагаева [7] следует, что $\Delta_n=O(1/\sqrt{n})$, если $\alpha(Q)>0$. Оказывается, что этот результат можно дополнить.

Теорема 2. *Если $|\xi_1|<C$, $\mathbf{D}\xi_1>0$ и $\rho(N)<1$ при некотором N, то $\Delta_n\leqslant C_1/\sqrt{n}$.*

Предположим теперь, что распределение μ и все распределения $Q(x,\cdot)$ абсолютно непрерывны относительно σ-конечной меры λ. Пусть $p(y)$, $q(x,y)$ — соответствующие плотности, причем $p(y)>0$ и функция q измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. Положим

$$I=\iint\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} q^2(x,y)\frac{p(x)}{p(y)}\lambda(dx)\lambda(dy).$$

Заметим, что $\beta(Q,\mu)<1$, если $I<2$.

Пример. Пусть $\mathcal{X}=\{0,1,2,\ldots\}$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра всех подмножеств множества $\mathcal{X}$, $\lambda(s)=1$ при всех $s\in\mathcal{X}$. Пусть

$$q(0,0)=b_0,\quad q(s,s+1)=a_s,\quad q(s+1,s)=b_{s+1},$$

где $0<a_s<1$, $a_s+b_s=1$ при всех $s\geqslant 0$. Предположим, что $\sum a_s<{}^1/_2$. В этом случае существует единственное стационарное начальное распределение μ, причем $I<2$, $\beta(Q,\mu)<1$.

С другой стороны, $\alpha(Q_n)=0$ при всех n.

В качестве следствия получаем, что коэффициент сильного перемешивания цепи с указанной переходной функцией и стационарным начальным распределением убывает экспоненциально быстро.

3. Предположим, что при каждом $n=1,2,\ldots$ случайные величины ξ_{ns}, $1\leqslant s\leqslant s_n$, связаны в (неоднородную) цепь Маркова [2] с переходными функциями Q_{ns} и пространствами состояний $(\mathcal{X}_{ns},\mathcal{A}_{ns})$.

Пусть μ_{ns} — распределение, индуцированное цепью на $(\mathcal{X}_{ns},\mathcal{A}_{ns})$. Допустим, что случайные величины ξ_{ns} имеют конечные дисперсии. Пусть для простоты $s_n=n$.

Положим

$$S_n=\sum_s\xi_{ns},\quad F_n(x)=\mathbf{P}(S_n-\mathbf{E}S_n<x\sqrt{\mathbf{D}S_n}),$$

$$\alpha_n=\min_{1\leqslant s<s_n}\alpha(Q_{ns}),\quad \beta_n=\max_{1\leqslant s<s_n}\beta(Q_{ns},\mu_{ns}).$$

В работе Р. Л. Добрушина [2] доказано, что $F_n(x)\to\Phi(x)$ при $n\to\infty$, если известно, что $\alpha_n n^{1/3}\to\infty$,

$$\mathbf{D}\xi_{ns}\geqslant c>0,\quad |\xi_{ns}|<C. \tag{1}$$

Этот результат Р. Л. Добрушина может быть дополнен следующим образом (ср. [1, 6]).

Теорема 3. *Допустим, что* $(1-\beta_n)n^{1/3}\to\infty$ *и выполнены условия* (1). *Тогда при* $n\to\infty$

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\to 0.$$

Теорема 4. *Допустим, что* $\alpha_n n^{1/3}/\ln n\to\infty$ *и выполнены условия* (1). *Тогда для каждого* $p>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p F_n(dx)\to\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\,\Phi(dx)$$

при $n\to\infty$.

Пример С. Н. Бернштейна ([2]) показывает, что в условии теоремы 3 множитель $n^{1/3}$ не может быть улучшен. В то же время, следуя Р. Л. Добрушину, можно ослабить требования (1). Пусть F_{ns} — распределение случайной величины $\xi_{ns}-\mathbf{E}\xi_{ns}$.

Теорема 5. *Допустим, что* $0<c\leq\mathbf{D}\xi_{ns}\leq C<\infty$ *и для каждого* $r>0$

$$\frac{1}{n(1-\beta_n)^2}\sum_s\int_{|y|>rn^{1/2}(1-\beta_n)^{3/2}} y^2F_{ns}(\partial y)\to 0$$

при $n\to\infty$. *Тогда* $F_n(x)\to\Phi(x)$.

Зададимся теперь каким-либо p, $2<p<\infty$. Пусть

$$\delta=\frac{p-2}{3p-2},\quad \gamma=2\frac{p-1}{3p-2},\quad c_n=\min_s\mathbf{D}\xi_{ns},$$

$$C_n=\max_s\{\mathbf{E}|\xi_{ns}|^p\}^{1/p}.$$

Теорема 6. *Если* $\mathbf{E}\xi_{ns}=0$, $\left(\dfrac{c_n}{C_n^2}\right)^{\gamma-\delta}\alpha_n\dfrac{n^\delta}{\ln^\gamma n}\to\infty$, *то при* $n\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^pF_n(dx)\to\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\Phi(dx).$$

В заключение приношу глубокую благодарность И. А. Ибрагимову за постановку задач и внимание к работе.

Поступило
23 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Н. Бернштейн*, ДАН, т. 24, № 1, 3 (1939). [2] *Р. Л. Добрушин*, Теория вероятн. и ее примен., т. 1, № 1, 72 (1956); т. 1, № 4, 365 (1956). [3] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965. [4] *А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов*, Теория вероятн. и ее примен., т. 5, № 2, 222 (1960). [5] *М. Н. Марушин*, Докл. АН УССР, А, 10, 886 (1971). [6] *С. В. Нагаев*, Теория вероятн. и ее примен., т. 2, 4, 389 (1957). [7] *С. В. Нагаев*, Теория вероятн. и ее примен., т. 6, 1, 67 (1961). [8] *О. В. Сарманов*, ДАН, т. 121, № 1 (1958).