Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 518:517.91/94 *МАТЕМАТИКА*

А. П. МАХМУДОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ К ПРИБЛИЖЕНИЮ РЕШЕНИЙ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НИКЛИБОРКА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 V 1974)

В. Никлиборк в работе [1] следующим образом сформулировал баллистическую задачу о том, попадет ли в данную цель снаряд, имеющий начальную скорость, как «краевую задачу».

Пусть дана система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка
$$\ddot{x}=f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y}=g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{1}$$
Требуется найти решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям
$$x(0)=y(0)=0, \quad \dot{x}^2(0)+\dot{y}^2(0)=v^2. \tag{2}$$
Для определенного (заранее неизвестного) $t^*\in[0, T]$ должно быть
$$x(t^*)=x^*, \quad y(t^*)=y^*. \tag{3}$$
Числа $v>0$, x^*, y^* заданы, причем $x^{*2}+y^{*2}>0$.

Важное значение, на наш взгляд, имеет нахождение различных методов для приближенного решения задачи Никлиборка (задачи (1)–(3)). В статье для приближенного решения задачи Никлиборка применяется метод полиномиальных операторов [2].

1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана некоторая система $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ из $n+1$ непрерывных функций. Сумма вида
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x), \tag{4}$$
где a_k — любые действительные числа, называется полиномом (обобщенным) по системе функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ [2].

Предположим, что $U_n[\psi(\xi); t]$ — некоторый линейный полиномиальный оператор, определенный в пространстве $\mathscr{L}^{+\infty}[0, T]$, так что любой функции $\psi(\xi)$, принадлежащей $\mathscr{L}^{+\infty}[0, T]$, ставит в соответствие обобщенный полином вида (4).

В случае, когда функция $\psi(\xi, s)$ зависит от двух переменных ξ и s, запись $U_n[\psi(\xi, s); t]$ будет обозначать, что оператор U_n действует на $\psi(\xi, s)$ как на функцию от ξ, в то время как переменная s играет роль параметра. Пользуясь теоремой об общем виде линейного функционала в $\mathscr{L}^{+\infty}$ (см. [8], стр. 222), представим полином $U_n[\psi(\xi, s); t]$ следующим образом:
$$U_n[\psi(\xi, s); t]=\sum_{k=0}^{n} \mu_k(s)\varphi_k(t), \tag{5}$$
где $\mu_k(s)$ — некоторые линейные функционалы, зависящие от параметра s.

Через $H=AH(J)$ обозначим класс функций $\psi(\xi)$, которые на рассматриваемом промежутке I удовлетворяют условию Липшица первого порядка с константой A.

В дальнейшем важную роль будут играть леммы 1 и 2. В. Никлиборка ([1]), лемма 1.1 В. К. Дзядыка ([2]) и следующая лемма об интегральных неравенствах.

Лемма (см. ([7]), теорема 2). *Пусть непрерывная и положительная на* $[0, T]$ *функция* $v(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$v(t)\leqslant f(t)+\int_0^t\{\varphi_1(s)v(s)+\psi_1(t,s)\}ds+\int_0^T\{\varphi_2(s)v(s)+\psi_2(t,s)\}ds,$$

где $\varphi_i(s)\geqslant 0$, $\psi_i(t, s)\geqslant 0$, $i=1, 2$; $f(t)\geqslant 0$ — *непрерывные функции и*

$$\left[1+\left(\exp\int_0^T\varphi_1(s)ds\right)\int_0^T\varphi_1(s)ds\right]\int_0^T\varphi_2(s)ds<1.$$

Тогда

$$v(t)\leqslant\frac{[1+(\exp\int_0^T\varphi_1(s)ds)\int_0^T\varphi_1(s)ds]\int_0^T\varphi_2(s)N(s)ds}{1-[1+(\exp\int_0^T\varphi_1(s)ds)\int_0^T\varphi_1(s)ds]\int_0^T\varphi_2(s)ds}+N(t),$$

где

$$N(t)=f(t)+\int_0^T[\psi_1(t,s)+\psi_2(t,s)]ds+\left(\exp\int_0^T\varphi_1(s)ds\right)\int_0^t\varphi_1(\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\left(\exp\int_0^T\varphi_1(s)ds\right)\int_0^t\varphi_1(\tau)\left[\int_0^\tau\{\psi_1(\tau,s)+\psi_2(\tau,s)\}ds\right]d\tau.$$

2. Рассмотрим задачу Никлиборка. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям (2). Тогда $x(t)$, $y(t)$ имеет вид

$$x(t)=vt\cos\alpha+\int_0^t(t-s)f(s)ds,\quad y(t)=vt\sin\alpha+\int_0^t(t-s)g(s)ds,\tag{6}$$

где
$f(s)=f(s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y(s))$, $\quad g(s)=g(s, x(s), y(s), \dot x(s), \dot y(s))$.

Искомое время t^* является корнем трансцендентного уравнения

$$v^2t^2=\left[x^*-\int_0^t(t-s)f(s)ds\right]^2+\left[y^*-\int_0^t(t-s)g(s)ds\right]^2.\tag{7}$$

Нетрудно видеть, что верно обратное: если t^* — корень уравнения (7), то решение (6) является решением задачи Никлиборка, при этом

$$vt^*\cos\alpha^*=x^*-\int_0^{t^*}(t^*-s)f(s)ds,\quad vt^*\sin\alpha^*=y^*-\int_0^{t^*}(t^*-s)g(s)ds.\tag{8}$$

Таким образом, если $x(t)$, $y(t)$ — решение задачи Никлиборка, то $x(t)$, $y(t)$ будет решением системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{t}{t^*}\left\{x^*-\int_0^Te(t^*,s)f(s)ds\right\}+\int_0^Te(t,s)f(s)ds,\\ y(t)&=\frac{t}{t^*}\left\{y^*-\int_0^Te(t^*,s)g(s)ds\right\}+\int_0^Te(t,s)g(s)ds,\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$e(t,s)=\begin{cases} t-s, & \text{если} \quad s\leqslant t, \\ 0, & \text{если} \quad s>t, \quad s,t\in[0,T]; \end{cases}$$

t^* является корнем уравнения (7).

Отправляясь от системы (9) и какого-нибудь линейного полиномиального оператора $U_n[\psi(\xi);\,t]$, введем в рассмотрение систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна с вырожденным ядром

$$x_n(t)=\frac{U_n[\xi;t]}{t_n}\left\{x^*-\int_0^T e(t_n,s)f_n(s)\,ds\right\}+\int_0^T U_n[e(\xi,s);t]f_n(s)\,ds,$$

$$y_n(t)=\frac{U_n(\xi;t)}{t_n}\left\{y^*-\int_0^T e(t_n,s)g_n(s)\,ds\right\}+\int_0^T U_n[e(\xi,s);t]g_n(s)\,ds, \quad (10)$$

где

$f_n(s)=f(s,x_n(s),y_n(s),\dot x_n(s),\dot y_n(s))$, $g_n(s)=g(s,x_n(s),y_n(s),\dot x_n(s),\dot y_n(s))$, t_n является корнем уравнения

$$v^2t^2=\left[x^*-\int_0^T e(t,s)f_n(s)\,ds\right]^2+\left[y^*-\int_0^T e(t,s)g_n(s)\,ds\right]^2. \quad (7')$$

Из (6), с учетом (8), аналогично имеем

$$\dot x_n(t)=U_n\left[\frac{1}{t_n}\left\{x^*-\int_0^T e(t_n,s)f_n(s)\,ds\right\};t\right]+\int_0^T U_n[e_1(\xi,s);t]f_n(s)\,ds,$$

(11)

$$\dot y_n(t)=U_n\left[\frac{1}{t_n}\left\{y^*+\int_0^T e(t_n,s)g_n(s)\,ds\right\};t\right]+\int_0^T U_n[e_1(\xi,s);t]g_n(s)\,ds,$$

где

$$e_1(t,s)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad s\leqslant t, \\ 0, & \text{если} \quad s>t, \quad s,t\in[0,T]. \end{cases}$$

В силу леммы 1.1 из [2] $x_n(t)$, $y_n(t)$ и $\dot x_n(t)$, $\dot y_n(t)$, определяемые по формулам (10) и (11) соответственно, представляют собою полиномы с коэффициентами $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, $c_k^{(n)}$, $d_k^{(n)}$ по системе функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$.

Пусть функции $f(t,x,y,u,z)$, $g(t,x,y,u,z)$ определены и непрерывны в области $R=\{0\leqslant t\leqslant T;\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant a;\ |u|\leqslant b,\ |z|\leqslant b\}$ и в этой области удовлетворяют условию Липшица по переменным x, y, u, v с константой A.

Положим

$$M=\max_R\{|f|,|g|\},\quad \delta=\max\{|x^*|,|y^*|\}.$$

Имеет место следующая теорема о существовании и единственности решения «приближающей» системы (10).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

a) *числа* v, T, δ *удовлетворяют неравенствам*

$$4M(\delta+{}^1/_2MT^2)\leqslant v^2,\quad 2(\delta+{}^1/_2MT^2)^2\leqslant v^2T^2;$$

b) $v\|U_n[\xi;t]\|_C+MT\|U_n[e(\xi,s);t]\|_C\leqslant a$,

$v\|U_n[1;t]\|_C+MT\|U_n[e_1(\xi,s);t]\|_C\leqslant b$;

c) *выполнено условие*

$$q=\left[\frac{v\cdot 5^{1/2}}{4M\delta}(v^2\cdot 5^{1/2}+1(\|U_u[\xi;t]\|_C+\|U_n[1;t]\|_C T+\right.$$
$$\left.+2(\|U_n[e(\xi,s);t]\|_C+\|U_n[e_1(\xi,s);t]\|_C)\right]AT<1.$$

Тогда система (10) *имеет единственное решение* $x_n(t)$, $y_n(t)$ *и это решение можно найти методом последовательных приближений.*

Замечание. Из условий теоремы 1 на основании леммы 1 Никлиборка следует, что уравнение (7′) имеет единственное решение t_n и это решение можно найти методом последовательных приближений.

Пусть выполняются условия:

$$q_1=AKT^2(\|U_n[\xi;t]\|_C+\|U_n[1;t]\|_C)\times$$
$$\times[1+AT(T+2)(\exp\{AT(T+2)\})]<1, \quad p=AT(T+2)<1,$$

где

$$K=\frac{v\cdot 5^{1/2}}{4M\delta}(v^2\cdot 5^{1/2}+1).$$

При этих предположениях имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда для любого линейного полиномиального оператора* $U_n[\psi(\xi);t]$ *полиномы* $x_n(t)$, $y_n(t)$, *являющиеся решением системы* (10), *приближают на* $[0,T]$ *решение* $x(t)$, $y(t)$ *задачи Никлиборка так, что при этом выполняются неравенства*

$$\|x(t)-x_n(t)\|_C\leqslant(1+\alpha_n)QL_n,$$
$$\|y(t)-y_n(t)\|_C\leqslant(1+\alpha_n)QL_n,$$

где

$$L_n=\|x(t)-U_n[x(\xi);t]\|_C+\|y(t)-U_n[y(\xi);t]\|_C+$$
$$+\|\dot x(t)-U_n[\dot x(\xi);t]\|_C+\|\dot y(t)-U_n[\dot y(\xi);t]\|_C;$$

$$\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{AT(T+1)Q\mathscr{E}(\check U_n;H)}{1-AT(T+1)Q\mathscr{E}(\check U_n;H)}, & \text{если}\quad AT(T+1)Q\mathscr{E}(\check U_n;H)<1,\\ \infty, & \text{если}\quad AT(T+1)Q\mathscr{E}(\check U_n;H)\geqslant 1;\end{cases}$$

$$Q=\frac{(1+pe^p)[6+A^2T^3K(\|U_n[\xi;t]\|_C+\|U_n[1;t]\|_C)(3T+8)e^p]}{6(1-q_1)},$$

$$\mathscr{E}(\check U_n;H)=\sup_{\check\psi\in H[-1,1]}\|\check\psi(t)-\check U_n[\check\psi;t]\|_{C[-1,1]}$$

и через $\check U_n$ *обозначен оператор, порожденный оператором* U_n *при помощи перехода от отрезка* $[0,T]$ *на отрезок* $[-1,1]$ *по формуле*

$$\check U_n[\check\psi;t]=U_n[\psi;\,{}^1\!/_2T(t+1)],$$

где $\check\psi$ *определена на* $[-1,1]$ *и* $\psi(t)\overset{\text{def}}{=}\check\psi(2t/T-1)$.

3. Оценка погрешности. Пусть $x_n(t)$, $y_n(t)$ — приближенное аналитическое решение, $x(t)$, $y(t)$ — точное решение задачи Никлиборка. Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\|x(t)-x_n(t)\|_C\leqslant l\varepsilon_n, \quad \|y(t)-y_n(t)\|_C\leqslant l\varepsilon_n,$$

где l — некоторая константа, а ε_n стремится к нулю при $n\to\infty$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
8 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. Nicliborc*, Ber. Verhandl Sächich. Akad. der Wiss. Zu Leipzig, Math.-phys. Kb., B. 82, 227 (1930). [2] *В. К. Дзядык*, Изв. АН СССР. сер. матем., т. 34 827 (1970). [3] *В. К. Дзядык*, Укр. матем. журн., т. 22, № 4, 5 461, 579 (1970). [4] *А. И. Перов, А. П. Махмудов*, Дифференциальные уравнения, т. 2, № 3, 365 (1966). [5] *А. П. Махмудов*, Докл. АзербССР, т. 24, № 10, 9 (1968). [6] *А. П. Махмудов*, Тр. IV Казахстанск. Межвузовск. научн. конфер. по математике и механике, сер. Механика, Алма-Ата, 1971. [7] *А. П. Махмудов, В. М. Мусаев*, Докл. АН АзербССР, т. 25, № 2 (1969). [8] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.