

Р. Х. ХЕСТАНОВ

**МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ДИФРАКЦИЙ В ЗАДАЧЕ
ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА ВОЛНОВОДА**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 5 IV 1974)

1. Развитие метода последовательных дифракций для тел с острыми кромками до недавнего времени ограничивалось необходимостью лучевого представления падающего поля для каждой последовательной дифракции. Во всех известных случаях m -кратный интеграл взаимодействия — результат $(m+1)$ -й последовательной дифракции — вычислялся (асимптотически) при условии, что границы свет — тень краевых волн находятся вдали от кромок.

В решении задачи дифракции на полуплоскости поля с границей свет — тень ⁽¹⁾ двукратный интеграл был преобразован к обычным и обобщенным интегралам Френеля. Это указало на реализованную в данной работе возможность преобразования интегралов взаимодействия полубесконечного волновода к известным специальным функциям. Модификация техники преобразования и суммирования интегралов взаимодействия позволяет решить новые дифракционные задачи. Далее приведено точное решение для волновода с фланцем.

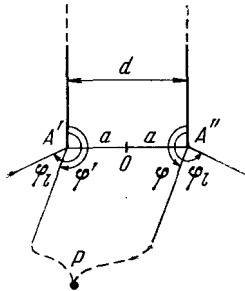


Рис. 1

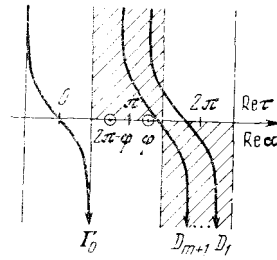


Рис. 2

2. Вначале рассмотрим задачу об излучении из открытого конца волновода, изображенного на рис. 1. Согласно ⁽²⁾ волны 1-го типа H_{01}, H_{03}, \dots , дифрагируя на кромках A'', A' , образуют «первичные» краевые волны с диаграммами направленности:

$$F_1''(\varphi) = CL_0(\varphi, \varphi_l), \quad C = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0, \quad L_0(\varphi, \varphi_l) = \frac{\sin(\varphi/2) \cos(\varphi_l/2)}{\cos \varphi - \cos \varphi_l} = L_0(\varphi', \varphi_l), \quad F_1'(\varphi') = F_1''(\varphi'), \quad (1)$$

где $-ka \sin \varphi_l = \pi(2l+1)/2$, $(2l+1)$ — номер волны.

Процедура последовательных дифракций приводит к следующему выражению для диаграммы излучения:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [F_{m+1}''(\varphi) e^{ika \sin \varphi} + F_{m+1}'(\varphi') e^{ika \sin \varphi'}]; \quad (2)$$

здесь F'_{m+1} , F''_{m+1} — соответственно диаграммы краевых волн, образовавшихся в результате $(m+1)$ -й дифракции на кромках A'' , A' .

В соответствии с (3) диаграмма краевой волны $(m+1)$ -й дифракции для граничных условий Дирихле вычисляется по формуле дифракции произвольного поля на полуплоскости

$$F''_{m+1}(\varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_{D_{m+1}} L_0(\varphi, \alpha_{m+1}) F'_m(2\pi - \alpha_{m+1}) e^{-ikd \sin \alpha_{m+1}} d\alpha_{m+1}, \quad (3)$$

из которой выделена диаграмма $F'_m(2\pi - \varphi) \exp(-ikd \sin \varphi)$ падающей волны, не участвующей в $(m+2)$ -й последовательной дифракции. Контур D_{m+1} изображен на рис. 2.

3. Формулы (2), (3) дают формальное решение, которое необходимо преобразовать к виду, доступному для анализа и вычислений. Для этого, используя (3), запишем F''_{m+1} в виде

$$\begin{aligned} F''_{m+1}(\varphi) &= CL_0(\varphi, \varphi_l) W_m(\varphi), \\ W_m(\varphi) &= L(\varphi, \alpha_m) L(\alpha_m, \alpha_{m-1}) \dots L_0(\alpha_1, \varphi_l) / L_0(\varphi, \varphi_l), \\ W_0 &\equiv 1, \quad F'_{m+1}(\varphi') = F''_{m+1}(\varphi') = F''_{m+1}(\varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где введен интегральный оператор

$$L(\varphi, \alpha_m) = \frac{1}{\pi i} \int_{D_m} d\alpha_m L_0(\varphi, \alpha_m) f(\alpha_m) = L(2\pi - \varphi, \alpha_m), \quad f(\alpha_m) = e^{-ikd \sin \alpha_m}. \quad (5)$$

Преобразуем интеграл взаимодействия W_m к комбинации интегралов

$$T_m(\varphi, \varphi_l) = \frac{1}{\pi i L_0(\varphi, \varphi_l)} \int_D L_0(\varphi, \alpha) L_0(\alpha, \varphi_l) \frac{[f(\alpha)]^m}{m} d\alpha. \quad (6)$$

Сформулируем в общем случае условия для L_0 , f и D_m , при которых осуществляется намеченное преобразование.

а) Функция L_0 разбивается на множители $L_0(\alpha_{m+1}, \alpha_m) = q_1(\alpha_m) q_2(\alpha_{m+1}) / q(\alpha_{m+1}, \alpha_m)$, причем $q(\alpha_{m+1}, \alpha_m)$ имеет нули $\alpha_{m,n} = \alpha_{m,n}(\alpha_{m+1})$, в том числе $\alpha_{m,0} = \alpha_{m+1}$.

б) Контур D_{m+1} имеет заданное (формулой дифракции) расположение относительно нулей $\alpha_{m+1,n}$ в некоторой области G . Точно так же расположен в G контур D_m относительно нулей $\alpha_{m,n}$.

в) Взаимная смена местоположений контуров D_m и D_{m+1} дает только вклад вычета полюса $\alpha_{m,0} = \alpha_{m+1}$, причем $\lim_{\alpha_m \rightarrow \alpha_{m+1}} (q(\alpha_{m+1}, \alpha_m) - q(\alpha_m, \alpha_{m+1})) L_0(\alpha_{m+1}, \alpha_m) = \mp i/2$, минус или плюс — знак направления обхода полюса $\alpha_{m,0}$ контуром D_m .

г) Функции $f(\alpha_m)$, $q_1(\alpha_m)$, $q_2(\alpha_m)$, $q(\alpha_{m+1}, \alpha_m)$ непрерывны при $\alpha_m \in D_m$, $\alpha_{m+1} \in D_{m+1}$.

д) Функция $q(\alpha_{m+1}, \alpha_m)$ удовлетворяет уравнениям: $q(\alpha_{m+1}, \alpha_m) = -q(\alpha_m, \alpha_{m+1})$, $[q(\alpha_{m+1}, \alpha_m) q(\alpha_m, \alpha_{m-1})]^{-1} = [q(\alpha_{m+1}, \alpha_{m-1})]^{-1} \{ [q(\alpha_{m+1}, \alpha_m)]^{-1} + [q(\alpha_m, \alpha_{m-1})]^{-1} \}$.

е) Интеграл T_m есть непрерывная функция обеих переменных φ , $\varphi_l \in G$. $|T_m| < \text{const} \cdot m^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 1$ при $m \rightarrow \infty$.

Если функции L_0 , f и контур D_m заданы в виде (1), (5), то интеграл в (6) выражается через ранее исследованный в задаче дифракции на щели (4) интеграл, асимптотически связанный с интегралом Френеля.

Сравнивая формулы (4) и (6) при $m=1$, получим, что $W_1 = T_1$. В W_2 , используя д), представим

$$\begin{aligned}
& L_0(\varphi, \alpha_2)L_0(\alpha_2, \alpha_1)L_0(\alpha_1, \varphi) = \\
& = -L_0(\varphi, \alpha_1)L_0(\alpha_1, \alpha_2)L_0(\alpha_2, \varphi) + \\
& + L_0(\varphi, \alpha_2)L_0(\alpha_2, \varphi)L_0(\varphi, \alpha_1)L_0(\alpha_1, \varphi)/L_0(\varphi, \varphi). \quad (7)
\end{aligned}$$

С учетом (7)

$$W_2 = T_1^2 - \frac{1}{(\pi i)^2 L_0(\varphi, \varphi)} \int_{D_2} d\alpha_2 \int_{D_1} d\alpha_1 L_0(\varphi, \alpha_1)L_0(\alpha_1, \alpha_2)L_0(\alpha_2, \varphi) f(\alpha_1) f(\alpha_2). \quad (8)$$

Замечаем, что второй член в (8) будет равен $-W_2$, если в нем переменить порядок интегрирования и сдвинуть контур D_2 за D_1 , согласно пункту в), учитывая вычет в точке $\alpha_1 = \alpha_2$. Следовательно, $W_2 = \frac{1}{2!} T_1^2 \mp T_2$.

Аналогичным приемом вычислены следующие интегралы:

$$W_2 = \frac{1}{3!} T_1^3 \mp T_1 T_2 + T_3, \quad W_4 = \frac{1}{4!} T_1^4 \mp \frac{1}{2!} T_1^2 T_2 + \frac{1}{2!} T_2^2 + T_1 T_3 \mp T_4, \dots$$

В общем случае W_j есть сумма всех возможных комбинаций

$$\frac{1}{l!} T_1^l \cdot \frac{1}{m!} (\mp T_2)^m \cdot \frac{1}{n!} T_3^n \cdot \frac{1}{p!} (\mp T_4)^p \dots,$$

для которых $l+2m+3n+4p+\dots=j$, l, m, n, p, \dots — целые неотрицательные числа.

4. Выражая W_m через T_m и используя (4), (5), перегруппируем члены в $\sum W_m$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} W_m(\varphi) = 1 + (T_1 - T_2 + T_3 - \dots) + \frac{1}{2!} (T_1 - T_2 + T_3 - \dots)^2 + \dots \quad (9)$$

Ряд (9) равномерно абсолютно сходится в области G , так как при выполнении условия (е) сходится ряд $|T_1| + |T_2| + |T_3| + \dots$. Используя разложение $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$ для подынтегральных выражений в T_m , находим, что

$$T_1 - T_2 + T_3 - \dots = V(\varphi) - V(\varphi_1), \quad (10)$$

где

$$V(\varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_D \ln[1+f(\alpha)] q_1(\alpha) q_2(\alpha) d\alpha / q(\varphi, \alpha).$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} W_m(\varphi) &= 1 + [V(\varphi) - V(\varphi_1)] + \frac{1}{2!} [V(\varphi) - V(\varphi_1)]^2 + \dots = \\
&= \exp[V(\varphi) - V(\varphi_1)].
\end{aligned}$$

Если L_0 и f заданы в виде (1), (5), то с учетом замены $\tau = \alpha - 3\pi/2$, $D = \Gamma_0 + 3\pi/2$ (см. рис. 2) $V(\varphi)$ есть функция, через которую выражается решение данной задачи методом факторизации (2). Следовательно, сумма последовательных дифракций сходится к строгому решению

$$\mathcal{F}(\varphi) = 2CL_0(\varphi, \varphi_1) \cos(ka \sin \varphi) \exp[V(\varphi) - V(\varphi_1)], \quad \pi/2 < \varphi < 3\pi/2,$$

полученному методом факторизации. При $\varphi > 3\pi/2$ или $\varphi < \pi/2$ в интеграле $V(\varphi)$ следует учесть вклады вычетов $-\ln(1+e^{-ika \sin \varphi})$ или $-\ln(1+e^{ika \sin \varphi})$. В случае $\varphi > 3\pi/2$ перенесем фазовый центр из O в A'' , а при $\varphi < \pi/2$ в A' :

$$\mathcal{F}(\varphi) = CL_0(\varphi, \varphi_1) \exp[V(\varphi) - V(\varphi_1)].$$

Аналогичным образом получается решение для остальных типов волн, а также решение задачи рассеяния.

5. Для волновода с фланцем процедура последовательных дифракций аналогична вышеописанной и приводит к формулам (2), (4), в которых $F_{m+1}'(\varphi') = F_{m+1}''(\varphi') \neq F_{m+1}''(\varphi)$. Интегральный оператор

$$L = L^s + L^w, \quad L^{s,w}(\varphi, \alpha) = \frac{1}{\pi i} \int_{D^{s,w}} d\alpha L_0^{s,w}(\varphi, \alpha) e^{-ikd \sin \alpha}, \quad L(\varphi', \alpha) \neq L(\varphi, \alpha), \quad (11)$$

соответствует формуле дифракции произвольного поля на клине. В (11) контур D^s лежит справа от полюсов $\alpha = \varphi$, $\alpha = 2\pi - \varphi$, D^w — слева от полюса $\alpha = 2\delta - \varphi$, δ — угол раствора клина, образующего фланец;

$$L_0^s(\varphi, \varphi_i) = (\pi/2\delta) \frac{\sin(\pi/\delta)(\pi - \varphi_i)}{\cos(\pi/\delta)(\pi - \varphi_i) - \cos(\pi/\delta)(\pi - \varphi)} = L_0^s(\varphi', \varphi_i), \\ L_0^w(\varphi, \varphi_i) = -L_0^s(-\varphi, \varphi_i). \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (4), получим граф разветвляющихся цепей последовательных дифракций. Условием а) — е) удовлетворяет только L_0^s , поэтому в (4) преобразуются так же, как в п.п. 3, 4, только цепи, состоящие из L^s операторов. Опуская свертку графа, приведем результат:

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_{m+1}''(\varphi) = C [\mathcal{L}_0(\varphi, \varphi_i) + \mathcal{L}(\varphi, \alpha_1) \mathcal{L}_0^w(2\pi - \alpha_1, \varphi_i) + \\ + \mathcal{L}(\varphi, \alpha_2) \mathcal{L}^w(2\pi - \alpha_2, \alpha_1) \mathcal{L}_0^w(2\pi - \alpha_1, \varphi_i) + \dots]. \quad (13)$$

Выражение (13) расшифровывается по следующим формулам:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^s + \mathcal{L}_0^w, \quad \mathcal{L}_0^s(\varphi, \varphi_i) = L_0^s(\varphi, \varphi_i) \exp[X(\varphi) - X(\varphi_i)], \\ \mathcal{L}_0^w(\varphi, \varphi_i) = L_0^w(\varphi, \varphi_i) \exp[Y(\varphi) - X(\varphi_i)], \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^s + \mathcal{L}^w, \\ \mathcal{L}^s(\varphi, \alpha_j) = L^s(\varphi, \alpha_j) \exp[X(\varphi) - Z(\alpha_j)], \\ \mathcal{L}^w(\varphi, \alpha_j) = L^w(\varphi, \alpha_j) \exp[Y(\varphi) - Z(\alpha_j)],$$

$$X(\varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_{D^s} \ln [1 + \exp(-ikd \sin \alpha)] L_0^s(\varphi, \alpha) d\alpha;$$

$X(\varphi)$ — функция, близкая к $V(\varphi)$ и выражающаяся через последнюю. Функция $Y(\varphi)$ отличается от $X(-\varphi)$ контуром, лежащим слева от полюса $\alpha = 2\delta - \varphi$. Функция $Z(\alpha_j)$ отличается от $X(\alpha_j)$ контуром, лежащим слева от полюса $\alpha = \alpha_j$ и справа от полюса $\alpha = 2\pi - \alpha_j$. Многократные интегралы в (13) $\mathcal{L}^w(2\pi - \alpha_j, \alpha_{j-1}) \dots \mathcal{L}_0^w(2\pi - \alpha_1, \varphi_i)$ не содержат полюсов на пути интегрирования $D^w = \Gamma_0 + 3\pi/2$. При $kd \gg 1$ из-за наличия в экспоненте подынтегрального выражения функции $-Z(\alpha_j)$ вычисление этих интегралов приводит к сходящимся, убывающим по степеням $1/(kd)$ рядам. При варьировании φ и δ структура решения изменяется благодаря вычетам полюсов функций $L_0^s(\varphi, \alpha_j)$ и $L_0^w(\varphi, \alpha_j)$ соответственно в X , \mathcal{L}^s и Y , \mathcal{L}^w .

С помощью рассмотренных задач, содержащих характерные типы дифракционного взаимодействия кромок, можно моделировать широкий класс волноводных конфигураций, для расчета которых использование других методов затруднительно.

Пользуясь случаем, приношу благодарность А. Г. Витушкину и Ю. П. Пытьеву за обсуждение математических аспектов настоящей работы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
Менделеево Московской обл.

Поступило
18 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Тищенко, Р. Х. Хестанов, ДАН, т. 212, № 4, 842 (1973). ² Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, 1966. ³ Р. Х. Хестанов, Радиотехника и электроника, т. 15, 2, 289 (1970). ⁴ М. Д. Хаскинд, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, т. 9, 10, 1800 (1964).