Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

МАТЕМАТИКА

В. В. НАПАЛКОВ

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ НА ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ R^n

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 V 1974)

1. Обозначения. Пусть $\omega\subset R^n$ — некоторая область, $\mathscr{E}(\omega)$, $\mathscr{E}'(\omega)$, $\mathscr{D}'(\omega)$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций на ω, распределений с компактным носителем в ω, всех распределений на ω соответственно, снабженные естественной топологией ([1]); $\mathscr{E}(\omega)^k$, $\mathscr{E}'(\omega)^k$, $\mathscr{D}'(\omega)^k$ — топологические произведения

$$\underbrace{\mathscr{E}(\omega)\times\ldots\times\mathscr{E}(\omega)}_{k\text{ раз}},\quad \underbrace{\mathscr{E}'(\omega)\times\ldots\times\mathscr{E}'(\omega)}_{k\text{ раз}},\quad \underbrace{\mathscr{D}'(\omega)\times\ldots\times\mathscr{D}'(\omega)}_{k\text{ раз}},$$

соответственно; $\hat{\mu}$ — преобразование Фурье распределения $\mu\in\mathscr{E}'(\omega)$; $\hat{\mathscr{E}}'(\omega)$ — множество преобразований Фурье элементов из $\mathscr{E}'(\omega)$, в котором вводится топология так, чтобы $\hat{\mathscr{E}}'(\omega)$ и $\mathscr{E}'(\omega)$ были топологически изоморфны; $\hat{\mathscr{E}}'(\omega)^k$ — топологическое произведение $\underbrace{\hat{\mathscr{E}}'(\omega)\times\ldots\times\hat{\mathscr{E}}'(\omega)}_{k\text{ раз}}$.

Отметим, что $\hat{\mathscr{E}}'(\omega)^k$ — модуль над кольцом $\hat{\mathscr{E}}'(\omega)$.

$H(D)$ — пространство функций, аналитических в области $D\subset\mathbf{C}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах из D; $B(\omega)$ — множество гиперфункций на ω ([3]).

Пусть $V\subset\mathbf{C}^n$ — область голоморфности, причем $V\cap R^n=\omega$. Такое множество существует по теореме Грауэрта ([4]). Заметим, что если ω выпуклая область, то в качестве V можно взять трубчатую область в $\mathbf{C}^n$ с основанием ω, которую будем обозначать в дальнейшем через V_ω.

Введем множества:

$$V_0=V,\quad V_j=\{z\in V\colon \operatorname{Im} z_j\neq0\},\ j=1,2,\ldots,n;$$
$$V\#\omega=V_0\cap V_1\cap\ldots\cap V_n=\{z\in V\colon \operatorname{Im} z_j\neq0,\ \forall j=1,2,\ldots,n\};$$
$$\hat{V}_j=V_1\cap\cdots\cap\hat{V}_j\cap\cdots\cap V_n=\{z\in V\colon \operatorname{Im} z_k\neq0,\ \forall k\neq j\},\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Согласно теории Сато ([3]), имеет место изоморфизм

$$B(\omega)\cong H(V\#\omega)\Big/\sum_{j=1}^{n}H(\hat{V}_j). \tag{1}$$

Если $\varphi\in H(V\#\omega)$, то через $[\varphi]$ обозначается гиперфункция на ω, которая определяется функцией φ в силу изоморфизма (1).

2. Пусть Ω — выпуклая область в R^n и $\mu_i=(\mu_{i1},\ldots,\mu_{ip})\in\mathscr{E}'(\Omega)^p$, $i=1,2,\ldots,p$. Рассматривается однородная система сверточных уравнений

$$\mu_i*f=0,\quad i=1,2,\ldots,p, \tag{2}$$

где $f\in\mathscr{E}(\Omega)^p$. Здесь свертка μ_i*f определена в открытом множестве

$$\Omega_i=\{x\in R^n\colon x-y\in\Omega,\ \text{когда}\ y\in\bigcup_{l=1}^{p}\operatorname{supp}\mu_{il}\}.$$

Множество решений системы (2), принадлежащих пространству $\mathscr{E}(\Omega)^p$, обозначим через W. Через E обозначается множество линейных комбинаций экспоненциальных решений системы (2), т. е. решений вида $\mathscr{P}(x)\exp\langle\lambda, x\rangle$, где компонентами $\mathscr{P}(x)$ служат многочлены. Возникает следующая аппроксимационная задача: совпадает ли $\bar{E}$ с W?

Предположим, что определитель

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}\hat{\mu}_{11} & \ldots & \hat{\mu}_{1p}\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \hat{\mu}_{p1} & \ldots & \hat{\mu}_{pp}\end{vmatrix}\not\equiv 0. \tag{3}$$

Элементы $\hat{\mu}_i=(\hat{\mu}_{i1},\ldots,\hat{\mu}_{ip})\in\hat{\mathscr{E}}'(\Omega)^p$ порождают в $\hat{\mathscr{E}}'(\Omega)$-модуле $\hat{\mathscr{E}}'(\Omega)^p$ подмодуль $I(\hat{\mu}_i)$. Пусть $I_{\mathrm{loc}}(\hat{\mu}_i)\subset\hat{\mathscr{E}}'(\Omega)^p$ — локальный подмодуль ([11]), порожденный подмодулем $I(\hat{\mu}_i)$. Если $\hat{\eta}\in I_{\mathrm{loc}}(\hat{\mu}_i)$, то

$$\hat{\eta}=\sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i\hat{\mu}_i, \tag{4}$$

где $\hat{\alpha}_i=\Delta_i/\Delta$, $i=1, 2, \ldots, p$, Δ_i — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix}\hat{\mu}_{11} & \ldots & \hat{\mu}_{i-11} & \hat{\eta}_1 & \hat{\mu}_{i+11} & \ldots & \hat{\mu}_{p1}\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \hat{\mu}_{1p} & \ldots & \hat{\mu}_{i-1p} & \hat{\eta}_p & \hat{\mu}_{i+1p} & \ldots & \hat{\mu}_{pp}\end{pmatrix}.$$

Известно, (см., например, ([5])), что функции $\hat{\alpha}_i$ являются преобразованиями Фурье аналитических функционалов α_i, имеющих носители ([9]) $\operatorname{supp}\alpha_i\subset R^n$, $i=1, 2, \ldots, p$.

Определение. Систему вида (2), для которой выполняется условие (3), будем называть Ω-симметричной, если для всякого $\hat{\eta}\in I_{\mathrm{loc}}(\hat{\mu}_i)$ функции $\hat{\alpha}_i$ в представлении (4) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{supp}\alpha_i+\operatorname{supp}\mu_{ik}\subset\Omega\quad\forall i, k=1, 2, \ldots, p.$$

Основная теорема. *Если система* (2) *Ω-симметрична, то $\bar{E}=W$.*

При $p=1$ система (2) сводится к одному уравнению

$$\mu*f=0,\quad f\in\mathscr{E}(\Omega),\quad \mu\in\mathscr{E}'(\Omega), \tag{5}$$

и условие Ω-симметричности всегда выполняется. Таким образом, из основной теоремы вытекает

Следствие 1. *Всякое решение уравнения* (3) *из пространства $\mathscr{E}(\Omega)$ аппроксимируется линейными комбинациями экспоненциальных многочленов, удовлетворяющих этому же уравнению.*

Результат, сформулированный в следствии 1, для размерности $n=1$ вытекает из работы А. Ф. Леонтьева ([2]), а для $n>1$ впервые был доказан Хёрмандером ([5]). Отметим, что наш метод доказательства существенно отличается от доказательства Хёрмандера.

Любая система вида (2), удовлетворяющая условию (3), является R^n-симметричной. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Всякое решение системы* (2) *из пространства $\mathscr{E}(R^n)$ аппроксимируется линейными комбинациями экспоненциальных решений этой же системы.*

Замечание. В работах ([6], [7]) Мальгранж рассматривал однородное уравнение свертки вида (5), где $\mu\in\mathscr{E}'(R^n)$, $f\in\mathscr{D}'(R^n)$, и доказал, что множество линейных комбинаций экспоненциальных решений плотно в множестве всех решений из пространства $\mathscr{D}'(R^n)$ этого уравнения. Можно рассмотреть систему (2), где $\mu_i\in\mathscr{E}'(\Omega)^p$, $f\in\mathscr{D}'(\Omega)^p$, $\Omega\subset R^n$ — произвольная выпуклая область, и с помощью нашего метода показать, что если система (2) является Ω-симметричной, то множество линейных комбинаций экспоненциальных решений этой системы плотно в множестве всех решений этой же системы из пространства $\mathscr{D}'(\Omega)^p$. При этом используются результаты Мартино ([8]).

Доказательство основной теоремы. Пусть $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\in\mathscr{E}'(\Omega)^p$ такова, что

$$\zeta\perp E. \tag{6}$$

Чтобы доказать теорему, достаточно показать по теореме Хана — Банаха, что $\zeta\perp f$ для всякой $f\in W$.

Докажем более сильное утверждение, а именно $\zeta*f=0$ $\forall f\in W$ в достаточно малой окрестности начала координат. Из условия (6) вытекает $\hat{\zeta}\in I_{\mathrm{loc}}(\hat{\mu}_i)$ и, следовательно, функцию $\hat{\zeta}$ можно представить в виде $\hat{\zeta}=\sum\limits_{i=1}^{p}\hat{\beta}_i\hat{\mu}_i$. По условию теоремы имеем

$$\operatorname{supp}\beta_i+\operatorname{supp}\mu_{ik}\subset\Omega\qquad\forall i,\ k=1,2,\ldots,p. \tag{7}$$

Поэтому для всякой окрестности $G\subset\mathbf{C}^n$ области Ω и всякой функции $h(z)\in H(G)$ в достаточно малой окрестности нуля имеет место равенство

$$\zeta*h=\sum_{i=1}^{p}(\beta_i*\mu_i)*h=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i*(\mu_i*h)=\sum_{i=1}^{p}\mu_i*(\alpha_i*h). \tag{8}$$

Пусть $f=(f_1,\ldots,f_p)\in W$. Покажем, что $\zeta*f=0$. С помощью интеграла типа Коши для функций многих комплексных переменных ([10]) найдем функции $\varphi_i\in H(V_{\Omega^\varepsilon}\#\Omega^\varepsilon)$ такие, что компонента $f_i=[\varphi_i]$ в смысле гиперфункций $B(\Omega^\varepsilon)$ ([3]). Здесь $\Omega^\varepsilon\subset\Omega$ — выпуклая область, причем $\rho(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)<\varepsilon$, ε — достаточно малое положительное число. Функция $f\in W$. Поэтому $\mu_i*f=\mu_{i1}*f_1+\ldots+\mu_{ip}*f_p=0$, $i=1,2,\ldots,p$, в смысле гиперфункций $B(\Omega_{\mu_i})$ ([3]), где $\Omega_{\mu_i}\subset\Omega$ — некоторая выпуклая область, содержащая $\operatorname{supp}\beta_i$ (существование такой области вытекает из соотношения (7)).

В силу изоморфизма (1) найдутся функции $\Psi_i^j\in H(\hat{V}_{\Omega_{\mu_i}j})$, $i,j=1,2,\ldots,p$, удовлетворяющие равенству

$$\mu_{i1}*\varphi_1+\ldots+\mu_{ip}*\varphi_p=\sum_{j=1}^{p}\Psi_i^j(z),\quad z\in H(V_{\Omega_{\mu_i}}\#\Omega_{\mu_i}),\quad i=1,2,\ldots,p. \tag{9}$$

Возьмем теперь выпуклую область $\Omega_\zeta\subset R^n$ так, чтобы функция $\zeta*f\in\mathscr{E}(\Omega_\zeta)$. Тогда $\zeta*f=[\zeta_1*\varphi_1+\ldots+\zeta_p*\varphi_p]$ в смысле гиперфункций $B(\Omega_\zeta)$. Используя равенства (8) и (9), можно показать, что

$$\zeta_1*\varphi_1+\ldots+\zeta_p*\varphi_p=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i*\Psi_i^j(z), \tag{10}$$

где $z\in V_{\Omega_\zeta^0}\#\Omega_\zeta^0$, $\Omega_\zeta^0\Subset\Omega_\zeta$ — некоторая выпуклая область. Правую часть равенства (10) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\beta_i*\Psi_i^j=\sum_{j=1}^{p}L_j,$$

где $L_j\in H(\hat{V}_{\Omega_\zeta^0 j})$, $j=1,2,\ldots,p$.

Следовательно, $\zeta * f = \sum_{j=1}^{p} L_j = 0$ в смысле гиперфункций $B(\Omega_\zeta)$. Так как $\Omega_\zeta^0 \Subset \Omega_\zeta$ и поэтому $\zeta * f \in \mathscr{E}(\overline{\Omega_\zeta^0})$, мы получаем (см. ([3]), стр. 132), что $\zeta * f = 0$ в области Ω_ζ^0. Теорема доказана.

Отдел физики и математики
Башкирского филиала Академии наук СССР
Уфа

Поступило
20 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. С. Владимиров*, Уравнения математической физики, «Наука», 1971. [2] *А. Ф. Леонтьев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, 269 (1965). [3] *П. Шапира*, Теория гиперфункций, М., 1972. [4] *H. Grauert*, Ann. Math., Ser. 2, v. 68, 460 (1958). [5] *L. Hörmander*, Invent. Math., v. 4, 306 (1968). [6] *B. Malgrange*, Ann. Inst. Fourier, v. 6, 271 (1956). [7] *Б. Мальгранж*, Математика, т. 7, 2, 33 (1963). [8] *A. Martineau*, Proc. Intern. Summer Inst. Lisbon, 1964. [9] *A. Martineau, Sem. Bourbaki*, 13 ann., 1960—1961, p. 214. [10] *В. А. Какичев,* Уч. зап. Шахтинск. пед. инст., т. 2, № 6, 25 (1959). [11] *J. J. Kelleher, B. A. Taylor*, J. reine u. angew. Math., в. 255, 190 (1972).