

Э. Г. ДАВЫДОВ

**О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ФРЕДГОЛЬМА I-ГО РОДА**

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 27 V 1974)

Выведем три следствия из теоремы Каратеодори (1). Пусть дана непрерывная вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $x \in X$, где X — компактное множество евклидова пространства. Пусть ν — неотрицательная борелевская мера, сосредоточенная на X , причем $\nu(X) = A > 0$.

Следствие 1. Если $\int_X f(x) d\nu = C$, где $C = (C_1, \dots, C_n)$, то существуют такие числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n+1$, и такие точки $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n+1$, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \lambda_i = C, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = A.$$

Это следствие получается из выражения $A \int_X f(x) d\frac{\nu}{A} = C$ применением к нему теоремы Каратеодори.

Следствие 2. Если $\int_X f(x) d\nu = C$, то существуют такие точки $x_i \in X$ и числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, что

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \lambda_i = C, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq A.$$

Зафиксируем x_i , $i = 1, \dots, n+1$, из следствия 1 и решим задачу

$\min_{\lambda_i \geq 0} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ при условии $\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \lambda_i = C$. Эта задача линейного программирования с n ограничениями. Нетрудно доказать, что в нашем случае решение этой задачи существует, поэтому у нее будет существовать решение, предусмотренное следствием 2.

Пусть теперь ν — произвольная счетно-аддитивная мера, причем $\|\nu(x)\| = A$, тогда имеет место

Следствие 3. Если $\int_X f(x) d\nu = C$, то существуют такие точки $x_i \in X$ и такие числа λ_i , $i = 1, \dots, n$, что

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \lambda_i = C, \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq A.$$

Имеем $\int_X f(x) d\nu = \int_X f(x) d\nu^+ - \int_X f(x) d\nu^-$, где ν^+ и ν^- — отрицательные счетно-аддитивные меры, причем $\nu^+(X) = A_1$, $\nu^-(X) = A_2$, $A_1 + A_2 = A$. Пусть $\int_X f(x) d\nu^+ = C^+$, $\int_X f(x) d\nu^- = C^-$, $C = C^+ - C^-$. В силу следствия 1 $C^+ =$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i^+) \lambda_i^+, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^+ = A_1, \quad \lambda_i^+ \geq 0, \quad C^- = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i^-) \lambda_i^-, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^- = A_2, \quad \lambda_i^- \geq 0.$$

Далее рассмотрим задачу $\min \left[\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^+ + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^- \right]$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i^+) \lambda_i^+ - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i^-) \lambda_i^- = C \text{ при фиксированных } x_i^+, x_i^- \text{ и неизвестных}$$

$\lambda_i^+, \lambda_i^- \geq 0$. Это задача линейного программирования с n ограничениями. Нетрудно доказать, что она в нашем случае имеет решение, поэтому у нее будет существовать решение, в котором не более n неизвестных λ_i^+, λ_i^- будут отличны от нуля.

Возьмем одно из таких решений и сделаем замену $\lambda_i = \lambda_i^+, i=1, \dots, n+1$; $\lambda_{i+n+1} = -\lambda_i^-, i=1, \dots, n+1$. В результате получится требуемое утверждение. Перейдем теперь к уравнениям Фредгольма I-го рода. Мы будем рассматривать следующую модификацию уравнений Фредгольма: найти счетно-аддитивную меру ν ограниченной вариации такую, что

$$\int_X K(x, y) d\nu = g(y),$$

где $K(x, y)$ — непрерывная функция своих аргументов, $g(y)$ — непрерывная функция, неравная тождественно нулю, $y \in Y, x \in X, X$ и Y — компактные множества евклидовых пространств. Эту задачу мы будем называть задачей I.

Теорема 1. *Решение задачи I существует тогда и только тогда, когда для любых наборов $y_i \in Y, i=1, \dots, n$, существуют такие константы λ_j , такие точки $x_j \in X, j=1, \dots, n$, и такая константа $A > 0$, не зависящая от n и выбора точек y_i , что выполняются соотношения*

$$g(y_i) = \sum_{j=1}^n K(x_j, y_i) \lambda_j, \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq A, \quad i=1, \dots, n.$$

Необходимость. Пусть ν^* — решение задачи I. Выберем произвольные точки $y_i \in Y, i=1, \dots, n$. Поскольку

$$\int_X K(x, y_i) d\nu^* = g(y_i) \quad \text{при } i=1, \dots, n,$$

то в силу следствия 3 существуют такие точки $x_j \in X$ и такие константы $\lambda_j, j=1, \dots, n$, что

$$\sum_{j=1}^n K(x_j, y_i) \lambda_j = g(y_i), \quad i=1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq A,$$

где $A > 0$ есть $\|\nu^*\|$.

Доказательство необходимости закончено.

Достаточность. Множество Y — компактное множество m -мерного евклидова пространства. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ в множестве Y существует конечная ε -сеть. Выберем последовательность $\varepsilon_k = 1/k, k=1, 2, \dots$, и пусть $R_k, k=1, 2, \dots$, — последовательность ε_k -сетей. образу-

ем множества $T_r = \bigcup_{i=1}^r R_i, r=1, 2, \dots$. Каждое множество T_r является ко-

нечной ε_k -сетью. Кроме того $T = \lim_{r \rightarrow \infty} T_r$ всюду плотно в Y . Пусть теперь

условие теоремы выполнено. Построим для каждого T_r меру ν_r такую, что

$$\int_x K(x, y_i) d\nu_r = \sum_{j=1}^{k_r} K(x_j, y_i) \lambda_j = g(y_i), \quad \sum_{j=1}^{k_r} |\lambda_j| \leq A,$$

где $y_i, i=1, \dots, k_r$, — все точки T_r . Поскольку $\|\nu_r\| \leq A$ и пространство всех мер ограниченной вариации сопряжено сепарабельному пространству C_X , то из последовательности функционалов ν_r можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\nu_{r_t}, t=1, 2, \dots$. Пусть эта последовательность сходится к мере ν^* , $\|\nu^*\| \leq A$. Далее, если точка $y^* \in T$, то существует такое r^0 , что для $r_t \geq r^0$ имеем $y^* \in T_{r_t}$, но тогда $\int_x K(x, y^*) d\nu_{r_t} = g(y^*)$ при

$r_t \geq r^0$. Отсюда следует $\int_x K(x, y^*) d\nu^* = g(y^*)$. Но множество T всюду плотно

в множестве Y , а функции $\int_x K(x, y) d\nu^*$ и $g(y)$ непрерывны и поэтому

$\int_x K(x, y) d\nu^* = g(y)$ при любом $y \in Y$. На этом заканчивается доказатель-

ство достаточности.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы задача I имела решение в классе неотрицательных мер ν ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы для любых наборов $y_i \in Y, i=1, \dots, n$, и любого n существовали бы такие $A \geq 0$, не зависящие от n и y_i , такие точки $x_j \in X$ и такие $\lambda_j \geq 0$, при которых выполнялись бы соотношения

$$g(y_i) = \sum_{j=1}^n K(x_j, y_i) \lambda_j, \quad i=1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq A.$$

На основании только что доказанных теорем можно построить алгоритм приближенного решения задачи I. Поскольку $K(x, y)$ — непрерывная функция своих аргументов, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|K(x, y_1) - K(x, y_2)| \leq \varepsilon$, если $\|y_1 - y_2\| < \delta$. Поскольку Y компактно, то в этом множестве существует конечная δ -сеть, состоящая из точек y_1, \dots, y_l . Пусть ν^* — решение задачи I. Построим ν_l , сосредоточенную в точках x_1, \dots, x_l , и такую, что $\int_x K(x, y_i) d\nu_l = g(y_i), i=1, \dots, l; \|\nu_l\| \leq \|\nu^*\| =$

$= A > 0$. В силу теоремы 1 такая мера ν_l и такие точки $x_i, i=1, \dots, l$, всегда существуют.

Обозначим $\varphi_l(y) = \int_x K(x, y) d\nu_l$. Имеем

$$|\varphi_l(y) - g(y)| \leq |\varphi_l(y) - \varphi_l(y_{i(y)})| + |g(y_{i(y)}) - g(y)| \leq 2\varepsilon A,$$

где $\|y - y_{i(y)}\| < \delta$.

Отсюда следует, что результат применения меры ν_l будет сколь угодно мало отличаться от $g(y)$, если выбрать достаточно малое ε при условии, что решение задачи I существует.

Для того чтобы найти приближенное решение задачи I, надо выбрать в множестве Y δ -сеть при достаточно малом δ и решить задачу

$$\min \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n K(x_i, y_j) \lambda_i = g(y_j), \quad j=1, \dots, n.$$

Эта задача неудобна тем, что функционал в ней негладкий, но она эквивалентна задаче

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^+ + \sum_{i=1}^n \lambda_i^- = \min, \quad \lambda_i^+, \lambda_i^- \geq 0, \quad i=1, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n K(x_i^+, y_j) \lambda_i^+ - \sum_{i=1}^n K(x_i^-, y_j) \lambda_i^- = g(y_j), \quad j=1, \dots, n.$$

Это обычная гладкая задача нелинейного программирования, в которой неизвестными являются x_i^+ , x_i^- , λ_i^+ , λ_i^- . Чтобы получить из решения задачи (2) решение задачи (1), достаточно сделать преобразование

$$\lambda_i^+ = \lambda_i \text{ при } i=1, \dots, n, \quad \lambda_i^- = -\lambda_{i+n}, \quad i=1, \dots, n.$$

Если рассмотреть обычное уравнение Фредгольма I-го рода, т. е. уравнение $\int_{\mathbf{x}} K(x, y) f(x) dx = g(y)$ и у него существует решение в классе функций $f(x)$ таких, что $\int_{\mathbf{x}} |f(x)| dx \leq A$, то теорема 1 гарантирует существование

хороших приближений такого решения в виде линейных комбинаций δ -функций с суммой модулей коэффициентов, не превышающих A . Если по условию задачи δ -функции не имеют физического смысла, то можно сначала все же найти такое решение, а потом приблизить его с помощью гладких функций, например, с помощью линейной комбинации нормальных законов с малой дисперсией.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, «Наука», 1973.