Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 519.272

МАТЕМАТИКА

А. И. ОРЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТАТИСТИК ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 22 V 1974)

Пусть $f_\alpha(x, \omega)$ — случайные вектор-функции, измеримые по совокупности переменных, x — k-мерный вектор, ω — точка вероятностного пространства $\{\Omega_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, P_\alpha\}$. Пространство элементарных событий Ω_α, σ-алгебра $\mathfrak{A}_\alpha$, вероятностная мера P_α, вообще говоря, зависят от параметра α, по которому будем переходить к пределу при $\alpha\to\infty$. При каждом ω задана функция распределения $F_\alpha(x, \omega)$, измеримая по (x, ω). В математической статистике применяются случайные векторы

$$\xi_\alpha = \int f_\alpha(x, \omega)\, dF_\alpha(x, \omega). \tag{1}$$

Обычно $F_\alpha(x, \omega)$ сходятся по вероятности при $\alpha\to\infty$ к функции распределения $F(x)$ во всех точках непрерывности F, конечномерные распределения $f_\alpha(x, \omega)$ сходятся к конечномерным распределениям случайной функции $f(x, \omega)$. Тогда естественно предположить, что распределение ξ_α сходится к распределению случайного вектора

$$\zeta = \int f(x, \omega)\, dF(x).$$

Работа посвящена доказательству этого предположения.

Статистики интегрального типа (1) применяются в проблеме двух выборок ([1-3]), для проверки нормальности ([4], [5]), симметрии распределения (([6]) или ([7])), независимости координат ([8], [9]), в теории ранговых статистик (([10]) и др.) и т. д. К статистикам ξ_α не удается применить обычную предельную теорию случайных процессов (см., например, ([11]), гл. 9), поскольку соответствующие функционалы оказываются разрывными. Переход от ξ_α к ζ обосновывался в каждом конкретном случае специально, причем иногда с неточностями.

Для упрощения обозначений без ограничения общности будем считать, что $x\in X=(0, 1)^k$. Для векторов $c=(c_1, \ldots, c_m)$ и $d=(d_1, \ldots, d_m)$ записи $c<d$ и $c\leqslant d$ означают, что $c_i<d_i$, $i=1, \ldots, m$, соответственно $c_i\leqslant d_i$, $i=1, \ldots, m$. Норма $|c|$ вектора c обычная эвклидова: $|c|=(c_1^2+\ldots+c_m^2)^{1/2}$. Брусами будем называть множества $\Delta=\{x\,|\,x\in X,\ a\leqslant x<b\}$, где a и b — некоторые векторы. Набор брусов $T=\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ назовем разбиением куба X, если $\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_s=X$, $\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Максимальный из диаметров брусов разбиения T обозначим $\lambda(T)$. Запись $\sum\limits_T Q(\Delta)$ будем обозначать сумму по всем брусам Δ разбиения T значений определенной на множестве брусов функции $Q(\Delta)$. Любая функция распределения $F(x)$ порождает некоторую меру. Будем обозначать $F(A)$ меру множества A.

В приложениях α — либо натуральное число, либо набор $\{n(1), \ldots, n(a)\}$ натуральных чисел — объемов a выборок и $\alpha\to\infty$ означает, что $\min\{n(1), \ldots, n(a)\}\to\infty$. Будем считать, что значения параметра α образуют направленное множество (([12]), стр. 95), переход к пределу по которому будем обозначать по-прежнему $\alpha\to\infty$.

Будем предполагать, что $f_\alpha(x, \omega)$ удовлетворяют следующему условию сепарабельности: существует счетное множество $\Lambda=\Lambda_\alpha$ точек куба X такое, что для любого фиксированного бруса Δ при любых c, d, $-\infty\leqslant c$, $d\leqslant\infty$, равна нулю вероятность симметрической разности множеств

$$\{d\leqslant f_\alpha(x, \omega)-f_\alpha(x', \omega)\leqslant c,\ x,\ x'\in\Delta\},$$

$$\{d\leqslant f_\alpha(x, \omega)-f_\alpha(x', \omega)\leqslant c,\ x,\ x'\in\Delta\cap\Lambda\}.$$

Колебанием вектор-функции $h(x)$ на брусе Δ назовем число $\delta(h,\Delta)=$ $=\sup\{|h(x)-h(x')|,\ x,\ x'\in\Delta\}$.

Рассмотрим случайные векторы

$$\eta_\alpha=\int f_\alpha(x, \omega)\,dF(x).$$

Утверждение 1. *Пусть при $\alpha\to\infty$ по вероятности $F_\alpha(x, \omega)$ сходятся к $F(x)$ во всех точках непрерывности F.*

Тогда $\xi_\alpha-\eta_\alpha\to0$ *по вероятности при* $\alpha\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть $F(\Delta)>0$ для любого бруса $\Delta\neq\phi$.*

Утверждение 1 верно тогда и только тогда, когда при $\alpha\to\infty$ и $\lambda(T)\to0$ по вероятности

$$\sum_T\delta(f_\alpha, \Delta)F(\Delta)\to0. \tag{2}$$

В приложениях ([13]) иногда встречаются оценки $F_\alpha(x, \omega)$ функций распределения, порождающие не вероятностные меры, а заряды. Запись $|\Phi|(\Delta)$ пусть означает (полную) вариацию заряда Φ на брусе Δ.

Утверждение 2. *Пусть для любого бруса Δ при $\alpha\to\infty$ по вероятности $|F_\alpha-F|(\Delta)\to0$.*

Тогда $\xi_\alpha-\eta_\alpha\to0$ по вероятности при $\alpha\to\infty$.

Теорема 2. *Утверждение 2 верно тогда и только тогда, когда $f_\alpha(x, \omega)$ асимптотически ограничены по вероятности и выполнено условие (2).*

Утверждение 3. *Пусть случайные вектор-функции $f_{1\alpha}(x, \omega)$ и $f_{2\alpha}(x, \omega)$ асимптотически ограничены по вероятности и удовлетворяют условию (2). Рассмотрим вектор-функцию $g_\alpha(x, y)$ (размерность вектора y равна сумме размерностей $f_{1\alpha}$ и $f_{2\alpha}$).*

Тогда $h_\alpha(x, \omega)=g_\alpha(x, f_{1\alpha}(x, \omega), f_{2\alpha}(x, \omega))$ также удовлетворяют условию (2) и асимптотически ограничены по вероятности.

Теорема 3. *Пусть функции $g_\alpha(x, y)$ асимптотически ограничены на $X\times\{|y|<a\}$ при каждом a. Утверждение 3 верно тогда и только тогда, когда при каждом a и $\alpha\to\infty$, $\varepsilon\to0$, $\lambda(T)\to0$ выполнено соотношение*

$$\sum_T\sup_{A(\Delta,a,\varepsilon)}|g_\alpha(x,y)-g_\alpha(x',y')|F(\Delta)\to0, \tag{3}$$

где $A(\Delta, a, \varepsilon)=\{|y|<a,\ |y-y'|<\varepsilon,\ x,\ x'\in\Delta\}$.

Отметим, что условие (3) выполнено для непрерывных функций $g_\alpha=g(x, y)$.

Таким образом, условие (2) достаточно проверять не для всех возможных подынтегральных функций, а лишь для простейших. Полезно также уметь выводить из близости распределений векторов $\varkappa_\alpha$ и τ_α близость распределений функций от них $t_\alpha(\varkappa_\alpha)$ и $t_\alpha(\tau_\alpha)$.

Расстоянием Леви между функциями распределения $G(z)$ и $H(z)$, где z — вектор конечной размерности m, назовем точную нижнюю грань h, для которой при всех z выполнены неравенства $G(z-\bar{h})-h\leqslant H(z)\leqslant$ $\leqslant G(z+\bar{h})+h$ (здесь $\bar{h}=h(1, 1, \ldots, 1)$).

Утверждение 4. *Пусть при $\alpha\to\infty$ стремится к нулю расстояние Леви между функциями распределения $G_\alpha(z)$ и $H_\alpha(z)$ асимптотически ограниченных по вероятности векторов $\varkappa_\alpha$ и τ_α. Тогда расстояние Леви меж-*

ду функциями распределения векторов $t_\alpha(\varkappa_\alpha)$ и $t_\alpha(\tau_\alpha)$ также стремится к нулю.

Условие А. Для последовательности функций распределения $G_\alpha(z)$ при любом a существует последовательность разбиений $T_n(a)$, $n=1, 2, \ldots$, куба $(-a, a)^m$ такая, что $\lambda(T_n)\to 0$ и для всех z, являющихся вершинами хотя бы одного из брусов хотя бы одного разбиения из этой последовательности, $G_\alpha(z+\bar{h})-G_\alpha(z-\bar{h})\to 0$ при $\alpha\to\infty$ и $h\to 0$.

Если множество значений α счетно, то условие А выполнено. Вспомним, что в статистических приложениях параметр α пробегает счетное множество.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* А. *Пусть для функций $t_\alpha(z)$ при любых a и $\varepsilon>0$ при $\alpha\to\infty$ и $\lambda(T)\to 0$ стремится к нулю $\sum' G_\alpha(\Delta)$, где сумма берется по тем брусам разбиения T куба $(-a, a)^m$, на которых колебание $t_\alpha(z)$ больше ε.*

Тогда утверждение 4 справедливо.

Если $t_\alpha(\varkappa_\alpha)$ асимптотически ограничены по вероятности, то условие $\sum' G_\alpha(\Delta)\to 0$ является также и необходимым для справедливости утверждения 4.

Рассмотрим случайные векторы

$$\gamma_{1\alpha}=\int g_\alpha(x, f_{1\alpha}(x,\omega),\ f_{2\alpha}(x,\omega))\,dF_\alpha(x,\omega),$$

$$\gamma_{2\alpha}=\int g_\alpha(x, f_1(x,\omega),\ f_2(x,\omega))\,dF(x).$$

Теорема 5. *Пусть*: 1) *при $\alpha\to\infty$ конечномерные распределения вектор-функций $(f_{1\alpha}(x,\omega), f_{2\alpha}(x,\omega))$ сходятся к конечномерным распределениям вектор-функции $(f_1(x,\omega), f_2(x,\omega))$, удовлетворяющей условию сепарабельности и измеримой по (x,ω);*

2) *условие* (2) *выполнено для $f_{1\alpha}(x,\omega)$* и *$f_{2\alpha}(x,\omega)$, асимптотически ограниченных по вероятности;*

3) *условие* (3) *выполнено для функций $g_\alpha(x, y)$, при каждом a асимптотически ограниченных на $X\times\{|y|<a\}$;*

4) *измеримые функции распределения $F_\alpha(x,\omega)$ сходятся по вероятности к функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности F;*

5) *условие* А *выполнено для функций распределения хотя бы одного из подынтегральных выражений в $\gamma_{1\alpha}$ и $\gamma_{2\alpha}$.*

Тогда расстояние Леви между функциями распределения $\gamma_{1\alpha}$ и $\gamma_{2\alpha}$ стремится к нулю при $\alpha\to\infty$.

Условие (2) выполнено для обычно встречающихся процессов, например, для эмпирического процесса $n^{1/2}(F_n(x)-F(x))$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из функции распределения F.

Теорема 6. *Пусть функции распределения $G(x|d)$ зависящего от векторного параметра d семейства имеют плотности $g(x|d)$. Пусть для некоторой ограниченной интегрируемой функции $h(x)$ при всех x выполнено неравенство $|g(x|d)-g(x|d')|\leqslant|d-d'|h(x)$ в некоторой окрестности истинного значения параметра d_0. Для оценки d_n, $n=1, 2, \ldots$, пусть $b_n=n^{1/2}(d_n-d_0)$ асимптотически ограничены по вероятности.*

Тогда для случайной функции $\mu_n(x)=n^{1/2}(G(x|d_n)-G(x|d_0))$ выполнено условие (2). *Если, кроме того, распределения b_n сходятся к пределу — распределению вектора c, то конечномерные распределения $\mu_n(x)$ в пределе не изменятся при подстановке $d_0+cn^{-1/2}$ на место d_n.*

Замечание об эмпирическом процессе и теорема 6 дают возможность проверять условия теоремы 5 для применяемых статистик, например, указанных в начале работы.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. L. Lehmann*, Ann. Math. Statist., v. 22, 1, 165 (1951). [2] *M. Rosenblatt*, ibid., v. 23, 4, 617 (1952). [3] *M. Fisz*, ibid., v. 31, 2, 427 (1960). [4] *M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz*, ibid., v. 26, 2, 189 (1955). [5] *Г. В. Мартынов*, Теория вероятн. и ее применения, т. 18, 3, 671 (1973). [6] *А. И. Орлов*, там же, т. 17, 2, 372 (1972). [7] *E. D. Rothman, M. Woodroofe*, Ann. Math. Statist., v. 43, 6, 2035 (1972). [8] *J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt*, ibid., v. 32, 2, 485 (1961). [9] *E. D. Rothman*, ibid., v. 42, 6, 1962 (1971). [10] *G. R. Shorack*, ibid., v. 43, 2, 412 (1972). [11] *И. И. Гихман, А. В. Скороход*, Введение в теорию случайных процессов, М., 1965. [12] *Дж. Л. Келли*, Общая топология, М., 1968. [13] *Ю. Н. Тюрин*, Теория вероятн. и ее применения, т. 15, 2, 567 (1970).