

Р. С. СИНГАТУЛЛИН

**НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИНАМИКЕ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ
В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 30 IV 1974)

Изучение поведения пробных частиц в различных полях служит основным способом получения информации о структуре физических полей. Ввиду неоднозначности математического способа описания физической ситуации возникает возможность исследовать пути пробных частиц в ОТО методом моделирования (¹⁻¹), применяя для этого более простые геометрические схемы и отображая поле тензора кривизны псевдориманова пространства V_4 векторными или бивекторными полями.

В этой работе докажем теоремы, с помощью которых можно упростить изучение и интерпретацию динамики точки в некоторых классах электромагнитных и гравитационных полей. Сформулируем математическую постановку проблемы: рассмотрим риманово многообразие V_4 с метрикой $g_{ij}(x^h)$ и сигнатурой (— — — +) и уравнениями времениподобного движения частицы

$$\frac{\delta(dx^i/ds)}{ds} = 0 \tag{1}$$

и, в той же системе координат, другое риманово пространство с метрикой $\bar{g}_{ij}(x^h)$ той же сигнатуры и уравнениями времениподобного движения

$$\frac{\bar{\delta}(dx^i/d\bar{s})}{d\bar{s}} = \left(\bar{A}_h \frac{dx^h}{d\bar{s}} \right) \bar{F}^i_{\cdot j} \frac{dx^j}{d\bar{s}}. \tag{2}$$

Пусть, при одинаковых начальных данных, после перехода от длин дуг s и \bar{s} к общему параметру τ интегралы (1) и (2) совпадают и имеют вид $x^i(\tau)$. Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, \bar{A}_h — вектор, $\bar{F}^i_{\cdot j}$ — бивектор. Требуется из этих условий определить $\bar{A}_h, \bar{F}^i_{\cdot j}, g_{ij}, \bar{g}_{ij}$.

Для успешного решения этой задачи необходимо выяснить, как ведут себя времениподобные геодезические (1) в смысле знака нормы

$$\bar{\Psi} = \bar{g}_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

или же как ведут себя времениподобные мировые линии (2) в смысле знака нормы

$$\Psi = g_{ij} \frac{dx^i}{d\bar{s}} \frac{dx^j}{d\bar{s}},$$

где dx^i/ds и $dx^i/d\bar{s}$ — первые интегралы уравнений (1) и (2) соответственно. Можно привести примеры таких пространств V_4 и \bar{V}_4 , в которых для времениподобной геодезической V_4 выражение $\bar{\Psi}$ может иметь разные знаки в различных областях пространства. В этой работе рассмотрим только два случая пространств V_4 и \bar{V}_4 : в первом случае для всех времениподобных мировых линий (2) выполняется условие $\Psi > 0$, во втором — для всех времениподобных геодезических (1) выполняется условие $\bar{\Psi} > 0$.

Взяв первый случай, в системе уравнений (2) перейдем к параметру s , с помощью соотношения

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = g_{ij} u^i u^j = 1 \quad (3)$$

исключим член \dot{S}/\dot{S} и получим систему

$$\frac{\delta u^i}{ds} = T_{mjk n}^i u^m u^j u^k u^n, \quad (4)$$

где

$$T_{mjk n}^i \equiv -\Omega_{.jk} g_{m n} + \bar{A}_k \bar{F}_{.j} g_{m n} + \Omega_{mjk} \delta_n^i - \bar{A}_k g_{lm} \bar{F}_{.j} \delta_n^i, \\ \Omega_{.jk}^i \equiv \bar{\Gamma}_{.jk}^i - \Gamma_{.jk}^i, \quad \Omega_{mjk} \equiv g_{mi} \Omega_{.jk}^i.$$

Пользуясь оставшимся произволом в выборе u^i , можем показать, что для сводимости системы (4) к системе (1) при условии (3) необходимо выполнение тензорного уравнения $T_{(mjk n)}^j = 0$, алгебраическое решение которого имеет вид

$$\Omega_{.jk}^i = 1/2 (\bar{A}_j \bar{F}_{.k}^i + \bar{A}_k \bar{F}_{.j}^i + C_j \delta_n^i + C_k \delta_j^i). \quad (5)$$

Это условие является и достаточным для совпадения всех траекторий движения $x^i(s)$, определяемых системами уравнений (2) и (1) соответственно.

Теорема 1. *Для того чтобы все времениподобные мировые линии (2) пространства \bar{V}_4 при одинаковых начальных условиях совпали с времениподобными геодезическими линиями (1) пространства V_4 , необходимо и достаточно выполнение условий (5) и*

$$\psi = g_{ij} \bar{u}^i \bar{u}^j > 0.$$

Допустим, что дифференциальные уравнения (2) допускают первый линейный интеграл $\bar{A}_k \bar{u}^k = \text{const}$. Тогда с необходимостью имеет место

$$\bar{A}_{i,k} + \bar{A}_{k,i} + \bar{A}_i \bar{A}_k \bar{F}_{.k}^i + \bar{A}_i \bar{A}_k \bar{F}_{.i}^k = 0, \quad (6)$$

где запятая означает ковариантную производную в \bar{V}_4 . В этом случае теорема имеет важное физическое приложение: изучение поведения заряженных частиц в \bar{V}_4 сводится к исследованию геодезических линий в V_4 , причем последнее пространство можем выбрать не сложнее \bar{V}_4 . Такие решения систем уравнений (5) и (6) существуют.

В случае $\bar{\psi} > 0$ методом, аналогичным примененному, можем доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы все времениподобные геодезические линии (1) пространства V_4 при одинаковых начальных условиях совпали с времениподобными мировыми линиями (2) пространства \bar{V}_4 , необходимо и достаточно выполнение условий (5) и*

$$\bar{g}_{ij} u^i u^j > 0.$$

Теорема приложима к динамике точки в поле гравитации. Например, если уравнения (2) допускают линейный интеграл $\bar{A}_k \bar{u}^k = a = \text{const}$, то они описывают траектории пробной частицы под действием силы типа Лоренца, физически хорошо интерпретируемой. Потребуем, чтобы пространство \bar{V}_4 представляло собой плоское пространство-время специальной теории относительности, т. е.

$$\bar{R}_{ijk m} = 0. \quad (7)$$

Теорема 2 позволяет сделать вывод, что траектории тел в полях тяготения g_{ij} , определяемых условием $\bar{\psi} > 0$ и дифференциальными уравнениями в частных производных (5)–(7), с точки зрения СТО являются мировыми

линиями, вызванными силовым полем типа Лоренца. Следовательно, для такого класса полей тяготения кривизна полностью отображается силой, выраженной через наблюдаемые величины \bar{F}_{ij} .

Следует отметить, что система (5)–(7) совместна и представляет интерес отыскание ее общего решения. Приведем здесь простое частное решение этой системы, во всей области удовлетворяющее условию $\bar{\psi} > 0$:

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - x^{1^2} dx^{4^2},$$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \frac{1}{k_1} \left[-dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + \frac{k_1}{2k_2} \left(\sqrt{1 + \frac{4k_2}{k_1} x^{1^2}} - 1 \right) dx^{4^2} \right],$$

$$\bar{A}_h(0, 0, 0, x^{1^2} e^{-1/2 k_1 k_2 x^{1^2}}), \quad \bar{F}_{14} = -\bar{F}_{41} = -\frac{1}{2x^1} e^{1/2 k_1 k_2 x^{1^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4k_2}{k_1} x^{1^2}}} \right),$$

остальные компоненты бивектора тождественно нули; $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ – постоянные интегрирования. Преобразованием переменных

$$ct = x^1 \operatorname{sh} x^4, \quad x = x^1 \operatorname{ch} x^4, \quad y = x^2, \quad z = x^3$$

это решение можем записать и в декартовых координатах (x, y, z, ct) .

Башкирский государственный педагогический институт
Уфа

Поступило
17 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. З. Петров, ДАН, т. 186, № 6, 1301 (1969). ² А. З. Петров, ДАН, т. 190, № 2, 305 (1970). ³ Р. С. Сингагуллин, Тез. докл. V Всесоюз. конф. по современным проблемам геометрии, Самарканд, 1972. ⁴ Р. С. Сингагуллин, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2, 90 (1971).