

Р. В. ФРЕЙВАЛД

**О ПРЕДЕЛЬНОМ СИНТЕЗЕ НОМЕРОВ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ  
ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЯХ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 V 1974)

В последние годы появился ряд работ (<sup>1-4</sup>) о построении автоматов и программ по примерам их работы, о восстановлении порождающей грамматики языка по информации о принадлежности или непринадлежности отдельных слов этому языку.

В (<sup>2, 5-7</sup>) рассматривается задача предельного синтеза номера общерекурсивной (о.р.) функции по значениям этой функции при различных значениях аргумента. Рассмотрим необходимые определения. Пусть зафиксированы некоторая нумерация  $\nu$  всех частично рекурсивных (ч.р.) функций и некоторая канторовская (т. е. вычислимая взаимно однозначная) нумерация всевозможных кортежей  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  (произвольной длины) натуральных чисел. Стратегией называется произвольная ч.р. функция  $F$ . Говорят, что стратегия  $F$  предельно синтезирует  $\nu$ -номер о.р. функции  $f$ , если: 1) для любого натурального  $n$  определено значение  $F(\langle f(0), f(1), \dots, f(n) \rangle)$  и 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\langle f(0), f(1), \dots, f(n) \rangle)$  су-

ществует и равен некоторому номеру функции  $f$  в нумерации  $\nu$ . Говорят, что класс  $U$  о.р. функций предельно  $\nu$ -синтезируем, если существует стратегия  $F$ , которая предельно синтезирует  $\nu$ -номера всех функций класса  $U$ .

В (<sup>2, 5-7</sup>) рассматривается предельный синтез номеров в главных вычислимых нумерациях  $\varphi$  (определение см., например, (<sup>8</sup>)) всех ч.р. функций.

В настоящей работе изучается предельная  $\nu$ -синтезируемость классов о.р. функций при различных вычислимых нумерациях  $\nu$  всех ч.р. функций. Решен вопрос Я. М. Барздиня о характеристизации тех классов, которые предельно  $\nu$ -синтезируемы при любой вычислимой нумерации  $\nu$  всех ч.р. функций. Рассмотрена также возможность предельного синтезирования не произвольных  $\nu$ -номеров данной функции, а  $\nu$ -номеров, обладающих определенными дополнительными свойствами.

**Теорема 1.** *Существует такая вычислимая нумерация  $\nu$  всех ч.р. функций, что никакой бесконечный класс о.р. функций не является предельно  $\nu$ -синтезируемым.*

Так как любой класс всюду определенных функций, состоящий только из конечного числа функций,  $\nu$ -синтезируем при любой (не обязательно даже вычислимой) нумерации  $\nu$ , получается следующее решение вопроса Я. М. Барздиня.

**Следствие.** *Класс  $U$  о.р. функций предельно  $\nu$ -синтезируем при любой вычислимой нумерации  $\nu$  всех ч.р. функций тогда и только тогда, когда  $U$  состоит из конечного числа функций.*

Э. М. Голд (<sup>2</sup>) показал, что любой подкласс любого эффективно перечислимого класса о.р. функций (т. е. класса, имеющего о.р. универсальную функцию) предельно  $\varphi$ -синтезируем при любой главной вычислимой нумерации  $\varphi$  всех ч.р. функций. Поэтому эффективно перечислимые классы можно рассматривать как «простейшие» предельно  $\varphi$ -синтезируемые классы.

Следующие две теоремы, однако, показывают, что для неглавных вычислимых нумераций  $\nu$  свойство допускать предельно  $\nu$ -синтезируемые бесконечные эффективно перечислимые классы и свойство допускать другие бесконечные предельно  $\nu$ -синтезируемые классы о.р. функций в каком-то смысле независимы.

**Теорема 2.** *Существует такая вычислимая нумерация  $\nu$  всех ч.р. функций, что:*

1) *существует бесконечный предельно  $\nu$ -синтезируемый класс о.р. функций,*

2) *никакой бесконечный эффективно перечислимый класс не является предельно  $\nu$ -синтезируемым.*

**Теорема 3.** *Существует такая вычислимая нумерация  $\nu$  всех ч.р. функций, что:*

1) *существует бесконечный эффективно перечислимый предельно  $\nu$ -синтезируемый класс,*

2) *любой предельно  $\nu$ -синтезируемый класс о.р. функций содержится в предельно  $\nu$ -синтезируемом эффективно перечислимом классе.*

Е. Б. Кипбер <sup>(9)</sup> доказал теорему, из которой следует, что для любой главной вычислимой нумерации  $\varphi$  всех ч.р. функций существует эффективно перечислимый класс, для которого нельзя предельно синтезировать минимальные  $\varphi$ -номера. Ниже будет показано, что в этом следствии существенно не то, что номера являются минимальными, а то, что из бесконечного множества всех номеров данной функции нужно выбрать заранее фиксированный номер.

Пусть  $\nu$  — произвольная нумерация всех ч.р. функций и  $s$  — произвольное натуральное число. Будем называть фиксацией  $\nu$ -номеров любое отображение  $\mu$ , сопоставляющее каждой о.р. функции  $f$  некоторое непустое множество  $\mu(f)$  номеров функции  $f$  в нумерации  $\nu$ . Будем говорить, что фиксация  $\nu$ -номеров является  $s$ -ограниченной, если для каждой о.р. функции  $f$  множество  $\mu(f)$  состоит из не более чем  $s$  элементов. Будем говорить, что класс  $U$  о.р. функций предельно  $(\mu-\nu)$ -синтезируем, если существует стратегия, которая по каждой функции  $f \in U$  предельно синтезирует некоторый номер из  $\mu(f)$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $\nu$  — произвольная вычислимая нумерация всех ч.р. функций и пусть  $s$  — произвольное натуральное число.*

*Тогда для любой  $s$ -ограниченной фиксации  $\nu$ -номеров  $\mu$  существует эффективно перечислимый класс о.р. функций, который не является предельно  $(\mu-\nu)$ -синтезируемым.*

**Следствие.** *Пусть  $s$  — произвольное натуральное число и пусть  $\nu$  — такая вычислимая нумерация всех ч.р. функций, что каждая о.р. функция в ней имеет не более чем  $s$  различных номеров.*

*Тогда существует эффективно перечислимый класс  $U$  о.р. функций, который не является предельно  $\nu$ -синтезируемым.*

С теоремой 4 контрастирует следующая довольно легко доказываемая **Теорема 5.** *Для любой вычислимой нумерации  $\nu$  всех ч.р. функций существует такая фиксация  $\nu$ -номеров  $\mu$ , что:*

1) *для любой о.р. функции  $f$  множество  $\mu(f)$  является конечным,*

2) *для любого класса о.р. функций из предельной  $\nu$ -синтезируемости вытекает предельная  $(\mu-\nu)$ -синтезируемость.*

**Следствие.** *Пусть  $\varphi$  — главная вычислимая нумерация всех ч.р. функций.*

*Тогда существует такая фиксация  $\varphi$ -номеров  $\mu$ , что:*

1) *для любой о.р. функции  $f$  множество  $\mu(f)$  является конечным,*

2) *любой эффективно перечислимый класс предельно  $(\mu-\varphi)$ -синтезируем.*

Вычислительный центр  
Латвийского государственного университета  
им. П. Стучки  
Рига

Поступило  
25 V 1974

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Я. М. Барздинь, ДАН, т. 190, № 5, 1048 (1970). <sup>2</sup> E. M. Gold, Information and Control., v. 10, 447 (1967). <sup>3</sup> Z. Manns, R. J. Waldinger, Communications of the Assoc. Comp. Machin., v. 14, № 3 (1971). <sup>4</sup> Я. М. Барздинь, Сборн. Теория программирования, Тр. симпозиума. Вычислительный центр СО АН СССР, 1972, стр. 81. <sup>5</sup> Я. М. Барздинь, Р. В. Фрейвалд, ДАН, т. 206, № 3, 521 (1972). <sup>6</sup> Я. М. Барздинь, К. М. Подниекс, Сборн. Mathematical Foundations of Computer Science, 9-15, Computing Research Centre, Bratislava, 1973. <sup>7</sup> L. Blum, M. Blum, XIV IEEE Ann. Symp. on Switching and Automata Theory, 1973, p. 200. <sup>8</sup> Ю. Л. Еришов, Теория нумерация, т. 1, Новосибирск. Гос. унив., 1969. <sup>9</sup> Е. Б. Кинбер, Сборн. Теория алгоритмов и программ, т. 1, Латвийск. гос. унив., 1974, стр. 221.