

В. Г. ШЕРЕТОВ

**ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КВАЗИКОНФОРМНЫЕ
ОТБРАЖЕНИЯ ОТКРЫТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 IV 1974)

1. Вопрос о природе экстремального квазиконформного отображения открытой римановой поверхности (р.п.) был поставлен Л. Берсом ⁽¹⁾ и рассматривался в ряде последующих работ ^(1, 5, 7, 8).

Специфика случая открытой р.п. проявилась, в частности, при изучении задачи о минимизации функционала $K[f]$ — максимального отклонения гомеоморфизма f от конформности — в классах квазиконформных отображений с фиксированным граничным соответствием. Экстремали функционала $K[f]$ в этой задаче не являются, вообще говоря, отображениями Тейхмюллера и не обладают свойством единственности ⁽¹⁾, поэтому не удастся установить точный вид комплексной характеристики $\mu_0(z)$ экстремального отображения; известно лишь необходимое условие, которому $\mu_0(z)$ должна удовлетворять ^(5, 7, 8).

Естественно предположить, что характер экстремального квазиконформного отображения определяется принадлежностью открытой р.п. тому или иному теоретико-функциональному классу ⁽²⁾. В этой заметке выделяется класс открытых р.п., а именно, класс O_{AB} , на который переносится теорема Тейхмюллера о существовании отображений с комплексными характеристиками вида $\mu_0(z) = \text{const } \overline{\varphi(z)} / |\varphi(z)|$, где $\varphi(z) dz^2$ — голоморфный квадратичный дифференциал. Класс O_{AB} , как известно, инвариантен при k -квазиконформных отображениях и характеризуется тем, что на р.п. $S \in O_{AB}$ всякая ограниченная аналитическая функция есть постоянная ^(2, 10, 11).

Известным методом Л. Альфорса ⁽¹⁾ можно показать, что аналогичный результат справедлив и для таких открытых р.п., которые имеют конечное число аналитических граничных контуров и конечное же число отмеченных точек, так что для них существует дубль и соответственно двулистая или четырехлистая накрывающие с отмеченными точками в качестве точек ветвления, принадлежащие классу O_{AB} . Квадратичный дифференциал $\varphi(z) dz^2$ при этом положителен вдоль граничных кривых и может иметь простые полюсы в отмеченных точках.

Основная идея доказательств состоит в установлении комплексного варианта принципа Дирихле для квазиконформных в среднем отображений ⁽¹²⁾; применяемый метод является вариационным ^(3, 6, 12).

2. Пусть S_0 и S — открытые р.п. гиперболического типа, фуксовы группы которых не содержат эллиптических элементов, и существует сохраняющая ориентацию k -квазиконформный гомеоморфизм $\beta: S_0 \rightarrow S$. Фиксируем на р.п. S непрерывную и, исключая изолированные пули, положительную конформную метрику $\rho(w) |dw|^2$, нормированную условием

$$\iint_S \rho(w) du dv = 1,$$

и рассмотрим семейство $F_\beta = F_\beta(S_0; S; \rho; k)$ гомотопных β гомеоморфизмов $f: S_0 \rightarrow S$ с локальным представлением $w(z)$, которые имеют суммируемые

с квадратами обобщенные производные w_z и $w_{\bar{z}}$, удовлетворяющие условию

$$D_\rho[f] \equiv \iint_{S_0} [|w_z|^2 + |w_{\bar{z}}|^2] \rho(w(z)) dx dy \leq (1+k^2)/(1-k^2).$$

Следуя Альфорсу ⁽¹⁾, обозначим через \bar{F}_ρ замыкание семейства F_ρ относительно равномерной сходимости на компактных множествах р.п. S_0 . Хотя отображения $f \in \bar{F}_\rho$ и не являются, вообще говоря, гомеоморфизмами, они абсолютно непрерывны в двумерном смысле: плотность меры $\rho(w) du dv$ относительно лебеговой меры в локальном параметре $z = z(P)$, $P \in S_0$, равна $\rho(w(z)) (|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2)$ ^(1, 13). Это значит, что мера множества точек $Q \in S$, имеющих более одного прообраза, равна нулю и отображение $f \in \bar{F}_\rho$ является гомеоморфизмом почти всюду.

Теорема 1. Семейство \bar{F}_ρ секвенциально компактно.

Утверждение следует из равномерной непрерывности отображений с ограниченным интегралом Дирихле ^(8, 13).

Рассмотрим теперь задачу: в семействе \bar{F}_ρ найти отображения, минимизирующие функционал $D_\rho[f]$.

Теорема 2. Экстремаль f_0 функционала $D_\rho[f]$ в семействе \bar{F}_ρ существует и является гармоническим относительно метрики $\rho(w) |dw|^2$ отображением, т. е. выражение $\rho(w_0(z)) w_{0z} \bar{w}_{0\bar{z}} dz^2$ совпадает почти всюду на р.п. S_0 с голоморфным квадратичным дифференциалом $\varphi(z) dz^2$, причем

$$\iint_{S_0} |\mu_0(z) \varphi(z)| dx dy = 1/2 (D_\rho[f_0] - 1) \leq k^2 / (1 - k^2).$$

Экстремальное отображение f_0 является отображением типа Тейхмюллера, т. е. имеет комплексную характеристику вида $\mu_0(z) = k(z) \overline{\varphi(z)} / |\varphi(z)|$, где $k(z)$ — измеримая функция, для которой имеем $0 \leq k(z) < 1$ почти всюду.

В основу доказательства положены вариационные рассуждения, аналогичные ⁽¹²⁾; при этом построение нужной вариации существенно опирается на лемму 2 из работы ⁽⁵⁾.

3. Предположим теперь, что $S_0 \in O_{AB}$ и метрика $\rho(w) |dw|^2$ имеет вид $|\psi(w) dw^2|$, где $\psi(w) dw^2$ — голоморфный на р.п. S квадратичный дифференциал. В силу устойчивости класса O_{AB} относительно k -квазиконформных отображений имеем $S = \beta(S_0) \in O_{AB}$.

Воспользуемся одним результатом Морри ⁽⁹⁾, который утверждает, применительно к нашей ситуации, следующее: если $w_0(z)$ — локальное представление функции f_0 на р.п. S_0 , гармонической относительно конформной метрики $|\psi(w) dw^2|$, то $w_0(z)$ бесконечно дифференцируема почти всюду в каждом локальном параметре.

Таким образом, для экстремального отображения f_0 будем иметь в рассматриваемом случае ⁽¹⁵⁾

$$\rho(w_0(z)) w_{0z\bar{z}} + \rho_w'(w_0(z)) w_{0z} w_{0\bar{z}} = 0$$

почти всюду и, поскольку $\rho_w' = 1/2 \psi'(w) \overline{\psi(w)} / \psi(w)$,

$$2\psi(w_0(z)) w_{0z\bar{z}} + \psi'(w_0(z)) w_{0z} w_{0\bar{z}} = 0. \quad (1)$$

Если положить здесь

$$\varphi_1(z) dz^2 = \psi(w_0(z)) w_{0z}^2 dz^2, \quad \varphi_2(z) dz^2 = \overline{\psi(w_0(z))} \overline{w_{0\bar{z}}^2} dz^2, \quad (2)$$

то (1) показывает, что $\varphi_1(z) dz^2$ и $\varphi_2(z) dz^2$ аналитичны на р.п. S_0 . Тогда из (2) найдем, что мероморфная функция $\varphi_2(z) / \varphi_1(z)$ ограничена на S_0 :

$$|\varphi_2(z) / \varphi_1(z)| = |\mu_0(z)|^2 \leq 1.$$

По теореме Лнувилля, которая имеет место для р.п. класса O_{AB} , заключаем, что $|\mu_0(z)| \equiv k_0$, $k_0 = \text{const} \leq k$. Отсюда сразу следует, что f_0 является k_0 -квазиконформным гомеоморфизмом.

Таким образом, доказана

Теорема 3. В семействе $F_p(S_0; S; \rho; k)$ гомеоморфизмов f между открытыми р.п. гиперболического типа S_0 и S класса O_{AB} , ассоциированном с k -квазиконформным отображением $\beta: S_0 \rightarrow S$, и нормированной конформной метрикой вида $|\psi(w)dw^2|$, где $\psi(w)dw^2$ — голоморфный на р.п. S квадратичный дифференциал, существует отображение Тейхмюллера f_0 с комплексной характеристикой $\mu_0(z) = k_0 \varphi(z) / |\varphi(z)|$, где $\varphi(z)dz^2 = |\psi(w_0(z)) \cdot \overline{w_{0z}} dz^2$ — голоморфный квадратичный дифференциал на р.п. S_0 ,

$$\iint_{S_0} |\mu_0(z)\varphi(z)| dx dy \leq \frac{k^2}{1-k^2}.$$

4. Вернемся к условиям п. 2 и предположим дополнительно, что метрика $\rho(w)|dw|^2$ имеет вид $|\psi(w)dw^2|$, где $\psi(w)dw^2$ — голоморфный дифференциал. Повторив рассуждения п. 3, мы приходим к заключению, что функция $\varphi_2(z)/\varphi_1(z)$ аналитична, регулярна и ограничена на р.п. S_0 : $|\varphi_2(z)/\varphi_1(z)| \leq 1$. По принципу максимума либо $\varphi_2(z)/\varphi_1(z) = \text{const}$, и тогда гармоническое отображение f_0 является тейхмюллеровым, либо для каждого компактного подмножества $S_0^* \subset S_0$ существует постоянная $k^* < 1$ такая, что $|\mu_0(z)| \leq k^*$, если $z \in S_0^*$. В последнем случае отображение f_0 является k^* -квазиконформным на S_0^* , и поэтому f_0 гомеоморфно всюду на S_0 .

Теорема 4. Если в условиях теоремы 2 метрика $\rho(w)|dw|^2$ имеет вид $|\psi(w)dw^2|$, где $\psi(w)dw^2$ — голоморфный дифференциал, то экстремаль f_0 функционала Дирихле осуществляет гармоническое гомеоморфное отображение заданных р.п., квазиконформное на каждой компактной части р.п. S_0 . Экстремальный гомеоморфизм является отображением типа Тейхмюллера, причем $k(z) < 1$ всюду и $k(z) > 0$ почти всюду на р.п. S_0 .

В заключение отметим, что в силу известных включений $O_{HP} \subset O_{HB} \subset O_{AB}$, где O_{HP} (соответственно O_{HB}) — класс открытых р.п., на которых не существуют отличные от постоянных положительные (соответственно ограниченные) гармонические функции⁽²⁾, результаты настоящей работы справедливы и для р.п. гиперболического типа классов O_{HP} и O_{HB} .

Кубанский государственный университет
Краснодар

Поступило
28 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Альфорс, Л. Берс, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, М., 1961. ² L. Ahlfors, L. Sario, Riemann Surfaces, Princeton, 1960. ³ П. П. Белинский, Сибирск. матем. журн., т. 1, № 3, 303 (1960). ⁴ В. В. Думкин, В. Г. Шеретов, Матем. заметки, т. 7, № 5, 605 (1970). ⁵ С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., т. 10, № 5, 573 (1969). ⁶ С. Л. Крушкаль, Там же, т. 8, № 2, 313 (1967). ⁷ R. Hamilton, Trans. Am. Math. Soc., v. 138, 399 (1969). ⁸ Г. Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965. ⁹ С. В. Morrey, Ann. Math., v. 49, № 4, 807 (1948). ¹⁰ M. Nakai, Nagoya Math. J., v. 14, 201 (1959). ¹¹ H. L. Royden, Comm. Math. Helv., v. 34, № 1, 52 (1960). ¹² В. Г. Шеретов, ДАН, т. 209, № 4, 808 (1973). ¹³ K. Shibata, Osaka Math. J., v. 15, 173 (1963). ¹⁴ K. Strebel, Comm. Math. Helv., v. 36, № 4, 306 (1962). ¹⁵ Y. Miyahara, Trav. Roy. Univ. Math., v. 4, 36 (1968).