Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 513.83 — *МАТЕМАТИКА*

Дж. ХАДЖИЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТОПОЛОГИИ В СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 V 1974)

Изучаются свойства (o)-топологии и топологий, близких к (o)-топологии, в структурах и, в частности, в булевых алгебрах. Рассматриваются, в основном, следующие вопросы: 1) связность и односвязность структур в (o)-топологии; 2) сравнение с (o)-топологией топологий в структурах, в которых структурные операции непрерывны; 3) связь между топологиями и мерами на булевых алгебрах; 4) компактность булевых алгебр в (o)-топологии; 5) связь между структурным пополнением и пополнением по равномерности булевых алгебр с топологией.

Неопределяемые термины и обозначения взяты из ([1-3]).

1. Структуру X назовем непрерывной, если для любых a, $b\in X$, $a<b$, найдется $c\in X$, $c\neq a$, b, что $a<c<b$.

Теорема 1. *Всякая условно полная непрерывная структура связна в (o)-топологии.*

Пример. Пусть X — алгебра измеримых по Лебегу множеств в $[0, 1]$, N — идеал измеримых множеств меры нуль. Как известно, топология в фактор-алгебре X/N, порожденная мерой, есть (o)-топология. В силу теоремы 1 X/N связна в этой топологии. Более того, как мы дальше увидим (в силу теоремы 4) она линейно связна и ее фундаментальная группа $\pi_1\ (X/N)=0$.

Следствие. *Пусть X — условно полная непрерывная структура, Y — топологическое пространство, f: $X\to Y$ — отображение такое, что если $x_\alpha\xrightarrow{(o)}x$, то $f(x_\alpha)\to f(x)$ в Y.*

Тогда $f(X)$ связно.

Замечание. В этом следствии как частные случаи содержатся результаты работ ([4], [5]).

Для формулировки следующих утверждений мы используем понятия обобщенного непрерывного отрезка и обобщенно-линейно-связного пространства, введенные в работе ([6]).

Теорема 2. *Всякая условно полная непрерывная структура обобщенно-линейно-связна в (o)-топологии.*

Пусть X, Y — топологические пространства, J — обобщенный непрерывный отрезок с интервальной топологией. Семейство отображений h_t: $X\to Y$, $t\in J$, назовем J-гомотопией, если отображение H: $X\times J\to Y$, определенное формулой $H(x, t)=h_t(x)$, непрерывно.

Отображения f: $X\to Y$ и g: $X\to Y$ назовем J-гомотопными, если существует такая J-гомотопия h_t: $X\to Y$, что $h_0=f$, $h_1=g$.

Топологическое пространство X назовем J-стягиваемым, если тождественное отображение пространства X J-гомотопно некоторому постоянному отображению пространства X в себя.

Теорема 3. *Пусть X — полная непрерывная структура и операция $x\wedge y$ (или $x\vee y$) непрерывна по совокупности переменных в (o)-топологии.*

Тогда существует такой обобщенный непрерывный отрезок J, что X является J-стягиваемым в (o)-топологии.

Теорема 4. *Пусть X — полная непрерывная структура и операция $x\wedge y$ непрерывна по совокупности переменных в (o)-топологии. Предполо-*

жим, что на X существует (o)-непрерывная действительная функция $f(x)$, обладающая свойствами:

а) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$;

б) $f(x)<f(y)$, *если* $x<y$.

Тогда X линейно связна, стягиваема в (o)-топологии, и, следовательно, фундаментальная группа $\pi_1(X)$ пространства X тривиальна.

2. Пусть ω_α — регулярное порядковое число. Будем говорить, что множество $\{p_\tau, \tau\in T\}$ элементов p_τ есть последовательность типа ω_α, если множество T является вполне упорядоченным множеством типа ω_α. Множество $\{p_\tau, \tau\in T'\}$ назовем подпоследовательностью последовательности $\{p_\tau, \tau\in T\}$, если $T'\subset T$ и T' — конфинальное подмножество T.

Скажем, что топология в множестве X есть ω_α-топология, если каждая точка $x\in X$ имеет базис окрестностей $U_x=\{V_\nu, \nu\in T\}$, где T — вполне упорядоченное множество типа ω_α и $V_\nu\subset V_\mu$, $V_\nu\neq V_\mu$ при $\nu>\mu$.

Теорема 5. *Пусть X является $\aleph_\alpha$-полной структурой и $x\in X$. Предположим, что в X задана ω_α-топология t такая, что точка x имеет базис окрестностей $U_x=\{V_\nu, \nu\in T\}$, обладающий следующими свойствами*:

а) *для каждого* $V\in U_x$ *существует* V': $V'\vee V'\subset V$;

б) $\bigcap\limits_{\nu\in T} V_\nu=\{x\}$;

в) *каждое $V\in U_x$ содержит окрестность $W\in U_x$, содержащую (o)-пределы всех последовательностей типа ω_α своих элементов.*

Тогда из всякой последовательности $x_\nu\xrightarrow{t}x$ типа ω_α можно выделить подпоследовательность x_ν' такую, что $\overline{\lim}\, x_\nu'=x$.

Следствие 1. *Пусть X является $\aleph_\alpha$-полной структурой и $x\in X$. Предположим, что в X задана ω_α-топология t, удовлетворяющая условиям* а), б) *и* в) *теоремы* 5 *и следующему условию*:

г) *для каждого $V\in U_x$ существует $V_0\in U_x$ такое, что $V_0\wedge V_0\subset V$.*

Тогда из всякой последовательности $x_\nu\xrightarrow{t}x$ можно выделить подпоследовательность $x_\nu'\xrightarrow{o}x$ (т. е. (o)-сходящуюся к x).

Среди топологий t в структуре X, удовлетворяющих условию

$$x_\nu\xrightarrow{o}x\Rightarrow x_\nu\xrightarrow{t}x,$$

где $\{x_\nu, \nu\in T\}$ — последовательность типа ω_α, существует сильнейшая; назовем ее $(o\omega_\alpha)$-топологией.

Следствие 2. *Всякая топология t в $\aleph_\alpha$-полной структуре X, удовлетворяющая условиям следствия 1, сильнее $(o\omega_\alpha)$-топологии.*

Замечание. В случае, когда $\omega_\alpha=\omega_0$ и X — булева алгебра счетного типа, следствие 2 есть теорема 17 в ([2]), гл. III.

3. Скажем, что в булевой алгебре ∇ задана B_1-топология, если выделен класс $U=\{V\}$ непустых множеств со свойствами:

1) каждое $V\in U$ нормально;

2) для любых $V_1, V_2\in U$ найдется $V\in U$, $V\subset V_1\cap V_2$;

3) для каждого $V\in U$ существует $V'\in U$ такое, что $V'\vee V'\subset V$;

4) $\bigcap\limits_{V\in U} V=\{0\}$.

Система U образует базис окрестностей нуля; базис окрестностей другой точки x может быть образован из множеств вида $x+V$, $V\in U$, где $x+y=(x\wedge Cy)\vee(Cx\wedge y)$.

B_1-топологию назовем B_2-топологией, если она слабее (o)-топологии. B_2-топология рассматривалась в ([1], [2]). Булеву алгебру с B_i-топологией назовем B_i-алгеброй, $i=1, 2$.

B_i-алгебры ∇_1 и ∇_2 назовем изоморфными, если существует гомеоморфизм ∇_1 на ∇_2, сохраняющий порядок.

B_i-алгебру ∇ назовем t-полным, если полна его аддитивная группа.

Теорема 6. *B_i-алгебра, $i=1, 2$, ∇ изоморфна всюду плотной подалгебре t-полной B_i-алгебры $\hat{\nabla}$. B_i-алгебра ∇ определена с точностью до изоморфизма.*

Теорема 7. *B_2-алгебра структурно полна тогда и только тогда, когда она t-полна.*

Замечание. Эта теорема является ответом на вопрос, поставленный в конце работы ([7]).

Теорема 8. *Атомическая B_1-алгебра вполне несвязна.*

Теорема 9. *Всякая структурно полная B_2-алгебра есть прямое произведение двух полных B_2-алгебр ∇_1 и ∇_2, где ∇_1-компактная вполне несвязная атомическая булева алгебра, ∇_2-некомпактная связная локально связная стягиваемая непрерывная булева алгебра.*

Теорема 10. *Всякая регулярная булева алгебра в (o)-топологии обладает базисом нормальных окрестностей нуля.*

Следствие. *Всякая регулярная непрерывная булева алгебра локально связна в (o)-топологии.*

Отображение m: $\nabla\to E$ булевой алгебры ∇ в полуполе E называется внешней E-мерой, если:

1) $m(x)=0$ при $x=0$;

2) $m(x)\geqslant m(y)$ при $x\geqslant y$;

3) $m(x+y)\leqslant m(x)+m(y)$.

Внешняя E-мера называется существенно положительной, если $m(x)=0$ только при $x=0$.

Слабейшую топологию в ∇, при которой внешняя E-мера m непрерывна, назовем ее естественной топологией.

Теорема 11. *Естественная топология всякой существенно положительной внешней E-меры есть B_1-топология.*

Обратно, для всякой B_1-топологии t на ∇ найдется полуполе E первого рода и существенно положительная внешняя E-мера на ∇, естественная топология которой совпадает с t.

Внешнюю E-меру назовем (o)-непрерывной, если из $x_\nu\xrightarrow{(o)}0$ следует $m(x_\nu)\to 0$ в E.

Пусть R — поле действительных чисел. Через $J_1(\nabla)$ $(J_2(\nabla))$ обозначим множество тех $x\in\nabla$, для которых $m(x)=0$ для всех (o)-непрерывных внешних R-мер (E-мер, где E пробегает всевозможные полуполя). Очевидно, что $J_i(\nabla)$, $i=1, 2$,— идеалы в ∇ и $J_2(\nabla)\subset J_1(\nabla)$.

Теорема 12. *Пусть ∇ — произвольная структурно полная булева алгебра. Тогда:*

1) $J_1(\nabla)=J_2(\nabla)$; *положим* $J(\nabla)=J_1(\nabla)=J_2(\nabla)$;

2) $J(J(\nabla))=J(\nabla)$;

3) $J(\nabla/J(\nabla))=\{0\}$;

4) *в $J(\nabla)$ нельзя ввести никакую B_2-топологию;*

5) *∇ есть прямая сумма двух структурно полных булевых алгебр $J(\nabla)$ и ∇', где ∇' является B_2-алгеброй в слабейшей топологии, порожденной всеми (o)-непрерывными внешними R-мерами на ней.*

Замечание. Существуют булевы алгебры ∇, для которых $\nabla=J(\nabla)$. Примером такой алгебры является алгебра G_0 регулярных открытых множеств ([8]).

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
19 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков*, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. [2] *Д. А. Владимиров*, Булевы алгебры, М., 1969. [3] *Р. Сикорский*, Булевы алгебры, М., 1969. [4] *В. П. Алексюк*, Матер. II Коми республиканской молодежной научной конференции, Сыктывкар, 1967, стр. 124. [5] *Ф. Д. Безносиков*, Тр. Московск. гос. пед. инст. им. В. И. Ленина, Сборн. статей Вопросы дифф. и псэвкл. геометрии, 1972–1973. [6] *Е. Д. Халимский*, ДАН, т. 185, № 2, 278 (1969). [7] *J. Flachsmeyer*, Arch. Math., v. 16, 25 (1965). [8] *F. Floyd*, Pacific J. Math., v. 5, 687 (1955).