Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

МАТЕМАТИКА

ХОАНГ ТУЙ

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ МИНИМАКСНОЙ ТЕОРЕМЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 IV 1974)

1. Пусть C, D — два произвольных множества, $F(x, y)$ — действительная функция, определенная на $C\times D$. Как известно, знаменитая минимаксная теорема фон Неймана ([5]) утверждает, что если C, D — симплексы в конечномерных эвклидовых пространствах X, Y соответственно, а $F(x, y)$ — непрерывная выпукло-вогнутая функция на $C\times D$, то имеет место равенство

$$\inf_{x\in C}\sup_{y\in D} F(x,y)=\sup_{y\in D}\inf_{x\in C} F(x,y). \tag{1}$$

Впоследствии эта фундаментальная теорема теории игр была обобщена различными авторами ([1], [3], [4], [6] и др). Особый интерес представляет результат Ву Вэн-цюна ([6]), который отличается от других тем, что использует только условия топологического характера и доказывается на основании лишь одномерной формы теоремы Хелли. К сожалению, ввиду ее некоторых слишком ограничительных условий (сепарабельность пространства D, непрерывность функции $F(x, y)$ на $C\times D$), теорема Ву Вэн-цюна не включает в себя таких важных результатов, как теоремы Никайдо ([3]) и Сайона ([4]).

Цель настоящей заметки — доказать предложение, близкое к теореме Ву Вэн-цюна, но достаточно общее, чтобы оно могло охватывать одновременно результаты Ву Вэн-цюна, Сайона и других. В отличие от большинства известных доказательств для минимаксных теорем предлагаемое здесь доказательство не использует никаких из следующих теорем: теорема отделимости выпуклых множеств, теорема о неподвижной точке, лемма Шпернера, теорема Хелли о пересечении выпуклых множеств и т. п.

2. Предположим, что C, D — подмножества двух отделимых топологических пространств X, Y соответственно. Возьмем произвольное действительное число α и положим для каждой точки $x\in C$

$$D_\alpha(x)=\{y\in D:\ F(x,\ y)\geqslant\alpha\}.$$

Определение. Будем говорить, что функция $F(x, y)$ α-связна на $C\times D$ если:

1) для любой конечной системы $a^1,\ldots,a^k\in C$ множество $\bigcap\limits_{i=1}^{k} D_\alpha(a^i)$ связно;

2) для любой пары a, $b\in C$ существует непрерывное отображение u: $[0,\ 1]\to C$ такое, что $u(0)=a$, $u(1)=b$ и для всех λ, μ, μ'

$$0\leqslant\mu'\leqslant\lambda\leqslant\mu\leqslant1\Rightarrow D_\alpha(u(\lambda))\subset D_\alpha(u(\mu))\cup D_\alpha(u(\mu')). \tag{2}$$

Функция $F(x, y)$ будет называться α^--связной на $C\times D$, если существует последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$ таких, что $\varepsilon_n\geqslant\varepsilon_{n-1}\geqslant0$, $n=1, 2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n\to0$, и при любом n функция $F(x, y)$ $(\alpha-\varepsilon_n)$-связна на $C\times D$; она будет называться строго α^--связной на $C\times D$, если, кроме того $\varepsilon_n>\varepsilon_{n-1}>0$ для всех $n=1, 2,\ldots$

Ясно, что если X, Y — линейные топологические пространства и для всех $x \in C$, $y \in D$ множества $D_\alpha(x)$ и $C_\alpha(y)=\{x\in C\colon\ F(x, y)<\alpha\}$ выпуклы, то функция $F(x, y)$ α-связна. В частности, функция $F(x, y)$, квазивыпуклая по x и квазивогнутая по y, заведомо строго α-связна при любом α. Нетрудно, однако, привести пример функции α^--связной (строго α^--связной), но не являющейся ни квазивыпуклой по x, ни квазивогнутой по y.

Положим

$$\gamma = \inf_{x\in C} \sup_{y\in D} F(x, y).$$

Теорема 1. *Предположим, что*: 1) *множество D компактно*; 2) *функция $F(x, y)$ строго α^--связна*; 3) *функция $F(x, y)$ полунепрерывна снизу по x, полунепрерывна сверху по y.*

Тогда имеет место равенство (1).

Теорема 1′. *Предположим, что*: 1) *множество D компактно*; 2) *функция $F(x, y)$ γ^--связна*; 3) *функция $F(x, y)$ полунепрерывна сверху по каждой переменной x, y.*

Тогда имеет место равенство (1).

3. Доказательство сформулированных теорем сводится к доказательству ряда вспомогательных предложений.

Лемма 1—1′. *Предположим, что множество D компактно, функция $F(x, y)$ полунепрерывна сверху по y и что существует последовательность $\varepsilon_n\geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$, $\varepsilon_n\to 0$, такая, что $\bigcap_{i=1}^{k} D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^i)\neq\emptyset$ для любого n и любой конечной системы $a^1, \ldots, a^k\in C$.*

Тогда имеет место (1).

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 3) *теоремы* 1 *и пусть функция $F(x, y)$ $(\gamma-\varepsilon)$-связна при некотором $\varepsilon>0$.*

Тогда $D_{\gamma-\varepsilon}(a)\cap D_{\gamma-\varepsilon}(b)\neq\emptyset$ для любых a, $b\in C$.

Лемма 2′. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 3) *теоремы* 1′ *и пусть функция $F(x, y)$ $(\gamma-\varepsilon)$-связна при некотором $\varepsilon\geqslant 0$.*

Тогда $D_{\gamma-\varepsilon}(a)\cap D_{\gamma-\varepsilon}(b)\neq\emptyset$ для любых a, $b\in C$.

Лемма 3—3′. *При выполнении условий теоремы* 1 (*или условий теоремы* 1′) *пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность, упомянутая в определении γ^--связной функции.*

Тогда $\bigcap_{i=1}^{k} D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^i)\neq\emptyset$ для любого n и любой конечной системы $a^1, \ldots, a^k\in C$.

(Ясно, что из лемм 1—1′ и 3—3′ непосредственно вытекают наши теоремы; леммы 2 и 2′ необходимы для доказательства леммы 3—3′.)

Доказательство леммы 1—1′. При фиксированном n множества $D_{\gamma-\varepsilon_n}(x)$ непусты в силу определения γ и замкнуты ввиду полунепрерывности сверху $F(x, y)$ по y. Так как по условиям леммы система множеств $\{D_{\gamma-\varepsilon_n}(x), x\in C\}$ центрированная, а множество D компактно, то пересечение этой системы непусто. Значит, для каждого n существует $y^n\in \bigcap_{x\in C} D_{\gamma-\varepsilon_n}(x)$. Пусть y^0 — любая предельная точка последовательности $\{y^n\}\subset D$. Тогда $y^0\in D$ и $(\forall x\in C)(\forall n)$ $F(x, y^n)\geqslant\gamma-\varepsilon_n$, откуда, в силу полунепрерывности сверху $F(x, y)$ по y, $F(x, y^0)\geqslant\gamma$. Следовательно, $\sup_{y\in D}\inf_{x\in C} F(x, y)\geqslant\gamma$, чем и доказана лемма, ибо обратное неравенство тривиально.

Доказательство леммы 2. Предположим, напротив, что при некоторых a, $b\in C$

$$D_{\gamma-\varepsilon}(a)\cap D_{\gamma-\varepsilon}(b)=\emptyset. \tag{3}$$

Пусть $u\colon\ [0, 1]\to C$ — непрерывное отображение, соответствующее паре a, b согласно определению $(\gamma-\varepsilon)$-связности. Тогда для каждого $\lambda\in[0, 1]$ множество $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$ не может пересекать одновременно $D_{\gamma-\varepsilon}(a)$ и

$D_{\gamma-\varepsilon}(b)$, ибо в противном случае имели бы $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))=E_a\cup E_b$, где $E_a=D(a)\cap D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$ и $E_b=D(b)\cap D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$ — два замкнутых непустых непересекающихся множества, вопреки связности $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$.

На основании соотношения (2), где $\alpha=\gamma-\varepsilon$, $\mu'=0$, $\mu=1$, заключаем тогда, что для каждого $\lambda\in[0, 1]$ имеет место одна и только одна из двух альтернатив:

$$\text{а) } D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(a); \quad \text{б) } D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(b).$$

Обозначим через M_a (M_b) множество тех $\lambda\in[0, 1]$, для которых верно а) (верно б)). Ясно, что $0\in M_a$, $1\in M_b$, $M_a\cup M_b=[0, 1]$ и что для любого $\mu\in[0, 1]$: $\mu\in M_a\Rightarrow[0, \mu]\subset M_a$; $\mu\in M_b\Rightarrow[\mu, 1]\subset M_b$ (последнее свойство следует из соотношения $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(u(\mu))\cup D_{\gamma-\varepsilon}(u(\mu'))$, см. ([2])).

Пусть $\bar\lambda=\sup M_a=\inf M_b$. Мы сейчас докажем, что предположение (3) ведет к противоречию.

Пусть, для определенности $\bar\lambda\in M_a$, т. е. $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\bar\lambda))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(a)$ и, стало быть,

$$(\forall y\notin D_{\gamma-\varepsilon}(a)) \quad F(u(\bar\lambda), y)<\gamma-\varepsilon. \tag{4}$$

Возьмем последовательность $\{\lambda_m\}\subset M_b$, сходящуюся к $\bar\lambda$. Для каждого m имеем $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda_m))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(b)$ и, значит, $(\forall y\in D_{\gamma-\varepsilon}(a))$ $F(u(\lambda_m), y)<\gamma-\varepsilon$. Отсюда, ввиду полунепрерывности снизу $F(x, y)$ по x,

$$(\forall y\in D_{\gamma-\varepsilon}(a)) \quad F(u(\bar\lambda), y)\leqslant\gamma-\varepsilon. \tag{5}$$

Из (4) и (5) заключаем: $\sup\limits_{y\in D} F(u(\bar\lambda), y)\leqslant\gamma-\varepsilon<\gamma$, что невозможно, ибо $\gamma=\inf\limits_{x\in C}\sup\limits_{y\in D} F(x, y)$.

Доказательство леммы 2′. Первая часть доказательства леммы 2′ проводится так же, как доказательство леммы 2.

Положив $\bar\lambda=\sup M_a=\inf M_b$, мы докажем недопустимость предположения (3). Пусть, для определенности, $\bar\lambda\in M_a$, так что $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\bar\lambda))\cap D_{\gamma-\varepsilon}(b)=\varnothing$, т. е. $(\forall y\in D_{\gamma-\varepsilon}(b))$ $F(u(\bar\lambda), y)<\gamma-\varepsilon$. На основании полунепрерывности сверху $F(x, y)$ по x для каждой фиксированной точки $y\in D_{\gamma-\varepsilon}(b)$ найдется окрестность V_y точки $u(\bar\lambda)$ такая, что $(\forall x\in V_y)$ $F(x, y)<\gamma-\varepsilon$.

Возьмем два числа $\lambda_i=\lambda_i(y)\in u^{-1}(V_y)$, $i=1, 2$, таких, что $I_y=[\lambda_1, \lambda_2]$ является еще окрестностью $\bar\lambda$ в $[0, 1]$, что возможно, ибо $u^{-1}(V_y)$ есть окрестность $\bar\lambda$ в $[0, 1]$. Имеем $F(u(\lambda_i), y)<\gamma-\varepsilon$, $i=1, 2$, и, следовательно, на основании полунепрерывности сверху $F(x, y')$ по y' для каждого $i=1, 2$ найдется окрестность $W_i(y)$ точки y такая, что $(\forall y'\in W_i(y))$ $F(u(\lambda_i), y')<\gamma-\varepsilon$. Тогда $W_y=W_1(y)\cap W_2(y)$ будет окрестностью точки y и $(\forall y'\in W_y)$ $F(u(\lambda_i), y')<\gamma-\varepsilon$, т. е. $y'\notin D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda_i))$ для $i=1, 2$. Из соотношения (2), где $\alpha=\gamma-\varepsilon$, $\mu'=\lambda_1$, $\mu=\lambda_2$, вытекает, что $y'\notin D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$, т. е. $F(u(\lambda), y')<\gamma-\varepsilon$, для любого $\lambda\in I_y$.

Итак, каждой точке $y\in D_{\gamma-\varepsilon}(b)$ отвечают окрестность W_y точки y и окрестность I_y точки $\bar\lambda$ такие, что $(\forall\lambda\in I_y)(\forall y'\in W_y)$ $F(u(\lambda), y')<\gamma-\varepsilon$. Так как $D_{\gamma-\varepsilon}(b)$ — компактное множество (ибо оно является замкнутым подмножеством компактного множества D), существует конечное множество $Q\subset D_{\gamma-\varepsilon}(b)$ такое, что система $\{W_y, y\in Q\}$ покрывает $D_{\gamma-\varepsilon}(b)$. Если $\lambda\in I=\bigcap\limits_{y\in Q} I_y$ и $y\in D_{\gamma-\varepsilon}(b)$, то $y\in W_{y'}$ для некоторого $y'\in Q$ и, значит, $F(u(\lambda), y)<\gamma-\varepsilon$, т. е. $y\notin D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))$. Итак, для каждого $\lambda\in I$ имеем $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))\cap D_{\gamma-\varepsilon}(b)=\varnothing$ и, следовательно, $D_{\gamma-\varepsilon}(u(\lambda))\subset D_{\gamma-\varepsilon}(a)$. Иными словами, $I\subset M_a$, что невозможно, ибо $\bar\lambda=\sup M_a=\inf M_b$.

Доказательство леммы 3—3′. Пусть, например, выполняются условия теоремы 1. Зафиксируем n и покажем, что для любой конечной системы $a^1, \ldots, a^k\in C$ имеем $\bigcap\limits_{i=1}^{k} D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^i)=\varnothing$. При $k=2$ это следует из леммы 2. Предположим, что это верно для $k=h-1$ и рассмотрим случай $k=h$. Положим $D'=D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^h)$, $D'_{\lambda-\varepsilon_n}(x)=D'\cap D_{\gamma-\varepsilon_n}(x)$. В силу леммы 2 имеем

$D_{\gamma-\varepsilon_{n_1}}(a^h)\cap D_{\gamma-\varepsilon_{n_1}}(x)\neq\phi$ для каждой точки $x\in C$ и каждого $n_1>n$ и, стало быть $D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^h)\cap D_{\gamma-\varepsilon_{n_1}}(x)\neq\phi$, ибо $D_{\gamma-\varepsilon_{n_1}}(a^h)\subset D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^h)$. Значит, $(\forall x\in C)\cdot\cdot(\exists y\in D')$ $F(x, y)\geqslant\gamma-\varepsilon_{n_1}$, т. е. $\inf\limits_{x\in C}\sup\limits_{y\in D}F(x, y)\geqslant\gamma-\varepsilon_{n_1}$ и так как n_1 может быть произвольно большим (т. е. ε_{n_1} произвольно малым), имеем $\inf\limits_{x\in C}\sup\limits_{y\in D}F(x, y)=\gamma$. Таким образом, условия леммы 2 остаются выполненными, когда $F(x, y)$ рассматривается на $C\times D'$. Поэтому, по предположению индукции, $\bigcap\limits_{i=1}^{h-1} D'_{\gamma-\varepsilon_n}(a^i)\neq\phi$, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{h} D_{\gamma-\varepsilon_n}(a^i)\neq\phi$, что и требовалось доказать.

4. О п р е д е л е н и е. Функцию $F(x, y)$ назовем **с и л ь н о с в я з н о й** на $C\times D$, если она α-связна на $C\times D$ при любом действительном числе α.

Как нетрудно доказать, если D компактно, то всякая функция $F(x, y)$, полунепрерывная сверху по y и сильно связная в смысле Ву Вэн-цюна ([6]), также сильно связна в определенном выше смысле.

Из доказанных теорем вытекают следствия.

С л е д с т в и е 1. *Пусть множество D компактно, функция $F(x, y)$ сильно связна на $C\times D$, полунепрерывна снизу по x (или полунепрерывна сверху по x) и полунепрерывна сверху по y.*

Тогда имеет место равенство (1).

С л е д с т в и е 2. *Пусть C, D — выпуклые подмножества отделимых линейных топологических пространств X, Y и пусть D компактно, $F(x, y)$ квазивыпукла по x и квазивогнута по y, полунепрерывна снизу по x (или полунепрерывна сверху по x) и полунепрерывна сверху по y.*

Тогда имеет место равенство (1).

Следствие 1 содержит как частный случай теорему Ву Вэн-цюна ([6]), а следствие 2 содержит как частные случаи теоремы Сайона ([4]), Никайдо ([3]), Нэша ([2]) и Кнезера ([1]).

Институт математики
Ханой
Демократическая Республика Вьетнам

Поступило
6 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *H. Kneser*, C. R., v. 234, 2418 (1952). [2] *J. F. Nach*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 36, 48 (1950). [3] *H. Nikaido*, Pacific J. Math., v. 4, 65 (1954). [4] *M. Sion*, Pacific J. Math., v. 8, 171 (1958). [5] *J. Von Neuman*, Math. Ann., v. 100, 195 (1928). [6] *Wu Wen-tsun*, Science Record, v. III, 229 (1959).