Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 517.9:532

МАТЕМАТИКА

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

О КОЛЕБАНИЯХ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 V 1974)

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость частично заполняет сосуд и вращается вместе с ним вокруг неподвижной оси с неизменной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Предполагается, что свободная поверхность Γ жидкости не имеет общих точек со стенкой Σ сосуда и обе эти поверхности достаточно гладкие.

Рассмотрим задачу о малых движениях жидкости относительно равномерного вращения. Запишем линеаризованные уравнения движения в системе координат $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, равномерно вращающейся вместе с сосудом с угловой скоростью $\omega\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — орт оси x_3), а граничные условия на Γ — в соответствующей криволинейной системе (ξ^1, ξ^2, ξ^3), выбранной таким образом, что точка $(\xi^1, \xi^2, 0)$ лежит на Γ, а координата ξ^3 направлена по внешней нормали $\mathbf{n}$ к Γ (т. е. изнутри жидкости), причем коэффициент Ламе $h_3=1$. Для определения скорости $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, отклонения давления $p=p(\mathbf{x}, t)$ от равновесного давления $p_0(\mathbf{x})$ и функции $\xi^3=\zeta(\xi, t)$, $\xi=(\xi^1, \xi^2)$, описывающей отклонение движущейся свободной поверхности от равновесной поверхности Γ, имеем следующую задачу [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}=2\omega\mathbf{u}\times\mathbf{k}-\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u_{1,3}+u_{3,1}=u_{2,3}+u_{3,2}=0, \quad -p+2\nu u_{3,3}+\alpha B_1\zeta=0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_n \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

$$(u_n, 1)_0\equiv\int_\Gamma u_n\,d\Gamma=0, \quad u_n\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{u}=0 \text{ на } \Sigma, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \zeta(\xi, 0)=\zeta_0(\xi). \tag{4}$$

Здесь Ω — область, занимаемая жидкостью при равновесии, ν — вязкость, $\alpha>0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — малое поле внешних сил; B_1 — дифференциальный оператор эллиптического типа: $B_1\zeta\equiv-\{[\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\alpha^{-1}(\partial p_0/\partial n)_\Gamma]\zeta+\Delta_0\zeta\}$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные кривизны поверхности Γ, Δ_0 — оператор Лапласа — Бельтрами.

Будем считать, что состояние равновесия вращающейся жидкости устойчиво по линейному приближению [3], т. е. оператор B_1 положительно определен: $(B_1\zeta, \zeta)_0\geqslant\delta^2\|\zeta\|_0^2$, $\delta^2>0$, $\zeta\in D(B_1)$.

2. Для перехода к операторной формулировке задачи видоизменим ее постановку. Воспользуемся разложением пространства вектор-функций $L_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства [3]: $L_2(\Omega)=\tilde{L}_2(\Omega)\oplus G(\Omega)$. Функция $\mathbf{v}\in G(\Omega)$, если $\mathbf{v}=\nabla p$, $p\in W_2^1(\Omega)$, $p|_\Gamma=0$; в $\tilde{L}_2(\Omega)$ входят такие $\mathbf{u}\in L_2(\Omega)$, которые могут быть аппроксимированы в норме $L_2(\Omega)$ гладкими соленоидальными векторами $\mathbf{v}$, $v_n|_\Sigma=0$.

Спроектируем левую и правую части (1) на $\tilde{L}_2(\Omega)$ и будем считать, что уже ∇p, $\mathbf{f}\in\tilde{L}_2(\Omega)$. Функции $u_n|_\Gamma$ и ζ в силу (2), (3) считаем принадлежащими пространству $H_0=L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$. Введем оператор проектирования

$P_0(\tilde{P})$ на $H_0(\tilde{L}_2(\Omega))$, исключим из (2) $\zeta(\xi, t)$ и обозначим $\nu\varphi(\xi, t) = -p+2\nu u_{3,3}$. Мы получим вместо (1) — (4) задачу

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2i\omega S\mathbf{u} + \nabla p - \nu\mathscr{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{f} \in \tilde{L}_2(\Omega),$$

$$u_{1,3}+u_{3,1}=u_{2,3}+u_{3,2}=0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\alpha}{\nu} B_2 u_n = 0 \text{ на } \Gamma, \qquad \mathbf{u}=0 \text{ на } \Sigma, \tag{5}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \tilde{L}_2(\Omega), \qquad \varphi(\xi, 0) = -\frac{\alpha}{\nu} B_2 \zeta_0 \equiv \varphi_0(\xi),$$

где $\mathscr{L} = \tilde{P}\Delta$, $B_2 = P_0 B_1$, $S\mathbf{u} = -i\tilde{P}(\mathbf{u}\times\mathbf{k})$, $S=S^*$, $\|S\| \leqslant 1$. Из ([4]) следует, что $B_2 = B_2^*$, $D(B_2) = W_2^2(\Gamma) \cap H_0$.

3. Нам понадобится формула Грина

$$(-\nu\mathscr{L}\mathbf{u}+\nabla p, \mathbf{v})_1 = \nu E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_\Gamma [\nu(u_{1,3}+u_{3,1})v^{1*} + \nu(u_{2,3}+u_{3,2})v^{2*} +$$

$$+ (-p+2\nu u_{3,3})v^{2*}]\, d\Gamma,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^*\, d\Omega, \tag{6}$$

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^* d\Omega,$$

справедливая для достаточно гладких $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{L}_2(\Omega)$, $\mathbf{v}|_\Sigma = 0$. Форма $E(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ порождает пространство функций $\tilde{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{u}|_\Sigma = 0$, с нормой, эквивалентной обычной норме $W_2^1(\Omega)$ ([5]).

Рассмотрим, следуя ([5, 6]), две вспомогательные задачи.

Задача I.

$$\nu A\mathbf{v} \equiv -\nu\mathscr{L}\mathbf{v} + \nabla p_1 = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{v} \in \tilde{W}_2^1(\Omega), \qquad \mathbf{f} \in \tilde{L}_2(\Omega),$$
$$v_{1,3}+v_{3,1} = v_{2,3}+v_{3,2} = -p_1+2\nu v_{3,3} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Задача II.

$$-\nu\mathscr{L}\mathbf{w} + \nabla p_2 = 0, \qquad \mathbf{w} \in \tilde{W}_2^1(\Omega),$$
$$w_{1,3}+w_{3,1} = w_{2,3}+w_{3,2} = 0, \qquad -p_2+2\nu w_{3,3} = \nu\varphi \text{ на } \Gamma.$$

Лемма 1. *Оператор A задачи* I *в $\tilde{L}_2(\Omega)$ самосопряжен и положительно определен, $D(A) \subset W_2^2(\Omega) \cap \tilde{W}_2^1(\Omega)$; при этом $D(A^{1/2}) = \tilde{W}_2^1(\Omega)$, $E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (A^{1/2}\mathbf{u}, A^{1/2}\mathbf{v})_1$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$. Решение задачи* I *дается формулой $\nu\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{f}$, где $A^{-1} > 0$ — вполне непрерывный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ ([7]) при $p > 3/2$.*

Доказательство леммы опирается на результаты ([5, 8]).

Лемма 2. *Существует единственное обобщенное решение задачи* II

$$\mathbf{w} = Q\varphi, \qquad Q\colon W_2\quad(\Gamma) \to \tilde{W}_2^1(\Omega), \qquad W_2^{-1/2}(\Gamma) \equiv H_- = (H_+)' \equiv (W_1^{1/2}(\Gamma) \cap H_0)';$$

для него выполняется тождество

$$(A^{1/2}\mathbf{w}, A^{1/2}\mathbf{u})_1 = (\varphi, \Gamma\mathbf{u})_0 \qquad \forall \mathbf{u} \in D(A^{1/2}), \qquad \Gamma\mathbf{u} \equiv u_n|_\Gamma. \tag{7}$$

Решения $\mathbf{w}$ задачи II при $\forall\varphi \in H_-$ образуют подпространство $U_2^1(\Omega) \subset \tilde{W}_2^1(\Omega)$ $\mathscr{L}$-гармонических функций; его ортогональное дополнение $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ в $\tilde{W}_2^1(\Omega)$, как следует из (6), состоит из функций $\mathbf{v} \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$, для которых $\Gamma\mathbf{v} = 0$:

$$D(A^{1/2}) \equiv \tilde{W}_2^1(\Omega) = U_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega). \tag{8}$$

Между пространствами H_+ и $U_2^1(\Omega)$ можно установить изоморфизм по закону $\psi=\Gamma\mathbf{w}$, $\mathbf{w}=\Gamma^{-1}\psi$; сделаем его изометрией, считая, что в H_+ введена норма $\|\psi\|_+=\|A^{1/2}\Gamma^{-1}\psi\|_1=\|A^{1/2}\mathbf{w}\|_1$.

Для дальнейшего рассмотрим оператор $C=\Gamma Q$.

Лемма 3. *C — самосопряженный положительный вполне непрерывный оператор, действующий в H_0. Его расширение на H_- есть изометрический оператор, отображающий H_- на H_+.*

4. Образуем с помощью оператора C^{-1} гильбертову шкалу пространств $W_2^\gamma(\Gamma)=D(C^{-\gamma})$ и будем считать, что B_2 из (5) действует в этой шкале. Будем разыскивать решение задачи (5) в виде $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $p=p_1+p_2$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — некоторые решения задач I и II. Тогда с использованием операторов A, Q и C можно переписать (5) в виде системы

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}+Q\varphi)+\nu A\mathbf{v}-2i\omega S(\mathbf{v}+Q\varphi)=\mathbf{f}, \qquad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\alpha}{\nu}B_2(\Gamma\mathbf{v}+C\varphi)=0.$$

Введем обозначения

$$V=C^{-1/2}\Gamma A^{-1/2}, \qquad V^*=A^{1/2}QC^{-1/2}, \qquad B=C^{1/2}B_2C^{1/2}.$$

Применим к левой и правой частям (8) оператор $A^{1/2}$: получим

$$\tilde{L}_2(\Omega)=L_{21}(\Omega)\oplus L_{22}(\Omega), \qquad L_{21}(\Omega)=A^{1/2}U_2^1(\Omega), \qquad L_{22}(\Omega)=A^{1/2}\mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Лемма 4. *Операторы V: $\tilde{L}_2(\Omega)\to H_0$ и V^*: $H_0\to\tilde{L}_2(\Omega)$ взаимно сопряжены и обладают следующими свойствами:*

1) *$VV^*=I_0$, $V^*V=P_{21}$, где P_{21} — ортопроектор на $L_{21}(\Omega)$;*

2) *V изометрически действует из $L_{21}(\Omega)$ на H_0, а V^* из H_0 на $L_{21}(\Omega)$.*

При доказательстве леммы используются равенство (7) и определения операторов Q, Γ и C.

Лемма 5. *Оператор B самосопряжен в H_0, $D(B)=W_2^1(\Gamma)$; его обратный $B^{-1}\in\mathfrak{S}_p$ при $p>3$, причем $B^{-1}>0$.*

При доказательстве последнего утверждения используется тот факт, что B^{-1} и $V^*B^{-1}V$ имеют в силу леммы 4 одинаковые собственные числа.

5. Покажем, что (9) можно привести к абстрактному параболическому уравнению в $L_2=\tilde{L}_2(\Omega)\oplus H_0$. Для этого произведем замену $\varphi=\frac{\alpha^{1/2}}{\nu}C^{-1/2}B^{1/2}\eta$, а затем к левой и правой частям (9) применим оператор

$$\begin{pmatrix} I_1 & -Q \\ 0 & \left(\frac{\alpha^{1/2}}{\nu}\right)^{-1}B^{-1/2}C^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Мы придем к уравнению

$$dy/dt+(\mathcal{J}-\mathcal{G})\mathcal{A}y=f, \qquad (10)$$

$$y=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \eta\end{pmatrix}, \quad f=\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ 0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}\nu A & 0\\ 0 & \frac{\alpha}{\nu}B\end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}=\mathcal{J}\mathcal{F}+2i\frac{\omega}{\nu}\mathcal{F}_1,$$

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}I_1 & 0\\ 0 & -I_0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}=\begin{pmatrix}I_1 & 0\\ 0 & I_0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\nu^2}R^*R & \frac{\alpha^{1/2}}{\nu}R^*\\ \frac{\alpha^{1/2}}{\nu}R & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_1=\begin{pmatrix}SA^{-1} & \left(\frac{\alpha^{1/2}}{\nu}\right)^{-1}SR^*B^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad R=B^{1/2}VA^{-1/2}, \qquad R^*=A^{-1/2}V^*B^{1/2}.$$

Лемма 6. *Оператор* R: $\tilde{L}_2(\Omega)\to H_0$ *вполне непрерывен.*

Отсюда и из свойств A^{-1} и B^{-1} получаем, что $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1\in\mathfrak{S}_\infty$. Оператор $\mathcal{A}$ в (10) в силу лемм 1 и 5 самосопряжен и положительно определен, а $\mathcal{A}^{-1}$ имеет конечный порядок $p>3$.

Теорема 1. *Задача* (5) *эквивалентна задаче Коши для абстрактного параболического уравнения* (10) *с начальным условием* $y(0)=y_0\in L_2$. *Однородная задача* (5) *равномерно корректна на любом временнóм интервале* $[0, T]$, *а ее решение выражается через полугруппу* $\mathcal{U}(t)$, *аналитическую в секторе, содержащем полуось* $t>0$, *и отвечающую оператору* $(\mathcal{J}-\mathcal{G})\mathcal{A}$. *Если в задаче* (5) $\mathbf{u}_0\in\tilde{W}_2^1(\Omega)$, $\zeta_0\in W_2^1(\Gamma)$, $\mathbf{f}(t)\in\tilde{W}_2^1(\Omega)$ *и* $A^{1/2}\mathbf{f}(t)$ *ограничена на* $[0, T]$, *то* (10) *имеет ослабленное решение* ([9]).

6. Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях, т. е. о решениях уравнения (10) при $\mathbf{f}=0$, зависящих от времени по закону $\exp(-\lambda t)$.

Лемма 7. *Оператор* $\mathcal{J}-\mathcal{G}$ *имеет обратный* $(\mathcal{J}-\mathcal{G})^{-1}=\mathcal{J}+\mathcal{D}$, *где* $\mathcal{D}\in\mathfrak{S}_\infty$.

Применим к левой и правой частям (10) оператор $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{J}+\mathcal{D})$; получим уравнение

$$z=\lambda\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{J}+\mathcal{D})z, \qquad y(t)=\exp(-\lambda t)z, \tag{11}$$

к которому применима теорема М. В. Келдыша ([7]) о свойствах спектра слабо возмущенного самосопряженного оператора конечного порядка.

Теорема 2. *Спектр задачи* (11) *дискретен, состоит из нормальных собственных значений* λ, $\operatorname{Re}\lambda>0$, *и имеет единственную предельную точку* $\lambda=\infty$; *при* $\omega=0$ *собственные числа* λ *расположены симметрично относительно вещественной оси. Каково бы ни было* $\varepsilon>0$, *все собственные числа, кроме, быть может, конечного числа, лежат в угле* $-\varepsilon<\arg\lambda<\varepsilon$. *Система корневых векторов задачи* (11) *полна в* $L_2=\tilde{L}_2(\Omega)\oplus H_0$.

Таким образом, учет капиллярных сил приводит к исчезновению предельной точки спектра $\lambda=0$, которая существовала в задаче о нормальных колебаниях «тяжелой» вязкой жидкости в сосуде ([5], [6]).

Заметим в заключение, что при $\omega=0$ для исследования задачи (11) можно применить теорию операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Так, (11) можно переписать в виде

$$z=\lambda(\mathcal{J}\mathcal{A}^{-1})(\mathcal{J}+\mathcal{H})z, \qquad \mathcal{H}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha^{1/2}}{\nu}R^* \\ \dfrac{\alpha^{1/2}}{\nu}R & \dfrac{\alpha}{\nu^2}RR^* \end{pmatrix}=\mathcal{H}^*,$$

и мы приходим к уравнению с $\mathcal{J}_1$-самосопряженным оператором $(\mathcal{J}\mathcal{A}^{-1})\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}+\mathcal{H}$, $\mathcal{J}\mathcal{A}^{-1}=(\mathcal{J}\mathcal{A}^{-1})^*$.

Автор благодарит С. Г. Крейна и А. Д. Мышкиса за внимание к работе и полезные замечания.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
27 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Л. Черноусько*, Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, М., в. 7, 1968. [2] *Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 6, № 6, 1054 (1966). [3] *Н. Д. Копачевский*, Там же, т. 7, № 1, 128 (1967). [4] *М. С. Агранович*, УМН, т. 20, в. 5 (125), 3 (1965). [5] *С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев*, Функциональн. анализ и его приложения, т. 2, 1, 40 (1968). [6] *Н. К. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев*, Там же, т. 2, 2, 21 (1968). [7] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965. [8] *В. И. Параска*, Матем. сб., т. 68, в. 4, 621 (1965). [9] *С. Г. Крейн*, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967.