Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 519.3:518:517.948 *МАТЕМАТИКА*

О. А. ЛИСКОВЕЦ

О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ЗАМЫКАЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 27 V 1974)

Расширяется сфера применимости вариационных методов решения некорректных задач двух типов: задачи вычисления значений неограниченного оператора и задачи отыскания решений уравнения I-го рода. Показано, что в обеих задачах оператор может предполагаться замыкаемым. Это позволяет, в частности, решать в гильбертовом пространстве задачи с симметричным оператором.

1°. Часто встречающаяся в приложениях проблема вычисления значений неограниченного оператора

$$x=By, \quad y\in Y,\ x\in X, \tag{1}$$

по приближенным данным $y=y_\delta$, $\|y_\delta-y_0\|\leqslant\delta$ (y_0 — точный элемент) представляет собой, как известно, некорректную задачу (такие задачи в последнее время нередко называют условно корректными). Для решения задачи (1) наиболее универсальными являются вариационные методы регуляризации, невязки и квазирешений. Их применение к задаче (1) обосновано в случае замкнутого, т. е. имеющего замкнутый график оператора ([1-4]) либо замкнутого же многозначного отображения ([5, 6]).

В данной заметке эти методы переносятся и на случай, когда B — лишь замыкаемый оператор, т. е. допускает замкнутое расширение. Относительно подробно рассматривается только применение метода регуляризации А. Н. Тихонова ([7]). Для двух других методов, для случая многозначных отображений и для уравнений I-го рода указаны соответствующие изменения.

2°. Предположим, что X — топологическое хаусдорфово, Y — нормированное пространство (достаточно считать его метрическим), а Ω — вещественный неотрицательный функционал на пространстве X, для которого бикомпактно любое множество $M_c=\{x\colon\ \Omega(x)\leqslant c\}$, $c\geqslant 0$, и область определения которого $\operatorname{dom}\Omega$ содержит искомое точное значение x_0. Тогда метод регуляризации для задачи (1) состоит в минимизации сглаживающего функционала

$$f_\alpha(y;\ y_\delta,\ B)=\|y-y_\delta\|^2+\alpha\Omega(By), \quad y\in D, \tag{2}$$

на множестве $D=\{y\colon\ y\in\operatorname{dom}B,\ By\in\operatorname{dom}\Omega\}$.

Если оператор B замкнут и элемент y_τ, $\tau=\tau(\delta)$, минимизирует функционал f_α на множестве D с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon=\varepsilon(\delta)\to 0$, $\delta\to 0$, и при этом параметр $\alpha=\alpha(\delta)>0$ выбирается так, что

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0, \qquad \limsup_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)}\leqslant\gamma<\infty, \tag{3}$$

то при $\delta\to 0$ имеет место сходимость $By_\tau\to By_0=x_0$. Это доказывается вполне аналогично результату работы ([4]), где дополнительно предполагалось, что $\operatorname{dom}\Omega\supset\operatorname{im}B$.

3^0. Пусть теперь B — незамкнутый оператор, но имеет замыкание — оператор $\overline{B}$. Рассмотрим наряду с (2) функционал

$$f_\alpha(y;\ y_\delta,\ \overline{B}) = \|y - y_\delta\|^2 + \alpha\Omega(\overline{B}y), \qquad y \in \Delta, \tag{4}$$

на множестве $\Delta = \{y\colon\ y \in \operatorname{dom} \overline{B},\ \overline{B}y \in \operatorname{dom} \Omega\}$. Так как $\operatorname{gr} \overline{B} = \overline{\operatorname{gr} B}$ (gr обозначает график оператора, а черта — операцию замыкания), то, очевидно, $\overline{\operatorname{dom} B} \supset \operatorname{dom} \overline{B}$, $D \subset \Delta$ и на множестве D оба функционала совпадают.

4^0. Пусть, как и прежде, элементы y_τ приближенно минимизируют функционал $f_\alpha(B)$ на множестве D и выполнены условия (3). Поскольку $0 \leqslant \inf\limits_\Delta f_\alpha(\overline{B}) \leqslant \inf\limits_D f_\alpha(B) \leqslant \delta^2 + \alpha(\delta)\Omega(x_0)$, то $f_\alpha(y_\tau;\ B) = f_\alpha(y_\tau;\ \overline{B}) \leqslant \inf\limits_\Delta f_\alpha(\overline{B}) + \delta^2 + \alpha(\delta)\Omega(x_0) + \varepsilon(\delta)$. Следовательно, элементы y_τ минимизируют и функционал $f_\alpha(\overline{B})$ на Δ с погрешностью, не большей $\varepsilon_1(\delta) = \delta^2 + \alpha(\delta)\Omega(x_0) + \varepsilon(\delta)$, причем отношение $[\delta^2 + \varepsilon_1(\delta)]/\alpha(\delta)$ имеет, в силу (3), ограниченный верхний предел. Поэтому для элементов приближенной минимизации функционала $f_\alpha(B)$ справедлив приведенный в п. 2^0 результат, и, таким образом, для аппроксимации значения By_0 не нужно строить замыкание $\overline{B}$.

5^0. Рассмотрим теперь случай, когда X есть пространство Ефимова — Стечкина ([8]), т. е. рефлексивное банахово пространство, в котором эквивалентны слабая и сильная топологии единичной сферы. Этому классу принадлежат все гильбертовы пространства.

Если замыкание операторов понимать в усиленном смысле как замыкание при действии из сильной топологии пространства Y в слабую топологию пространства X, то в пространстве X со свойством Ефимова — Стечкина можно брать регуляризующий функционал $\Omega(x) = \|x\|^k$, $k > 0$. При этом $\operatorname{dom} \Omega = X$ и, следовательно, $D = \operatorname{dom} B$. Считая оператор B замыкаемым в усиленном смысле и обозначая соответствующее его замыкание по-прежнему через $\overline{B}$, получим, что $\Delta = \operatorname{dom} \overline{B}$ и $\overline{D} \supset \Delta$. Из этого легко вывести равенство

$$\inf_D f_\alpha(y;\ y_\delta,\ B) = \inf_\Delta f_\alpha(y;\ y_\delta,\ \overline{B}). \tag{5}$$

Таким образом, и здесь минимизация функционала $f_\alpha(B)$ означает одновременную минимизацию функционала $f_\alpha(\overline{B})$, а это значит, что в условиях настоящего пункта и п. 2^0 с $\gamma = 0$ в соотношении (3) элементы приближенной минимизации функционала (2) y_τ обладают свойством сходимости $\|By_\tau - By_0\| \to 0$, $\delta \to 0$ (ср. ([4])).

Напомним, что при банаховых пространствах X, Y и линейных операторах замыкание операторов в усиленном смысле совпадает с обычным (см., например, ([9])).

6^0. Выше оператор B считался известным точно. Можно, как в работе ([6]), рассмотреть и случай приближенно заданного оператора. Это лишь несколько усложнит технику, но не изменит существа дела. Можно также, следуя ([6]), считать B многозначным отображением. В этом случае мы сможем аппроксимировать некоторые из точных значений $x \in \overline{B}y_0$, не строя замыкания $\overline{B}$ для отображения B.

7^0. Все сказанное ранее остается справедливым и для метода невязки, если в нем выбрать минимизируемый функционал Ω так же, как в п.п. 2^0 и 5^0, и вести минимизацию $\Omega(By)$ на множестве $D \cap \{y\colon\ \|y - y_\delta\| \leqslant \varphi(\delta)\}$, $\delta \leqslant \varphi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. При этом в условиях п. 4^0 минимизацию достаточно вести с погрешностью, не превосходящей фиксированного ε, $0 \leqslant \varepsilon < \infty$, а в условиях п. 5^0 — с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \geqslant 0$, $\varepsilon(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ (ср. ([4])).

Несколько иначе обстоит дело с методом квазирешений В. К. Иванова, точнее с его вариантом, названным методом почти-квазирешений ([10]). В пространствах Ефимова — Стечкина (п. 5^0) использовать соответствующее свойство не удается, так что ε-квазирешения задачи (1) на фиксированном шаре, содержащем точное значение x_0, сходятся к последнему лишь слабо, как и во всяком рефлексивном пространстве. Зато в условиях п. п. 2°. 3° можно брать любое бикомпактное множество M, содержащее точное значение x_0, в частности, множества M_c, $c\geqslant\Omega(x_0)$, из п. 2°. Тогда, минимизируя норму $\|y-y_\delta\|$ на прообразе пересечения $M\cap\operatorname{im}B$ с погрешностью, не превосходящей некоторого $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$, получим ε-квазирешения задачи (1) на множестве M, которые, как нетрудно проверить, сходятся к точному значению $x_0=By_0$ при $\varepsilon=\varepsilon(\delta)\to0$, $\delta\to0$, для всякого замыкаемого оператора B.

8°. Все сформулированные результаты в полной мере переносятся на решение уравнений I-го рода

$$Ay=z,\quad z\in Z,\quad y\in Y, \tag{6}$$

с замыкаемым оператором A, если применять для этого те же вариационные методы. Фактически эта задача состоит в вычислении значения обратного оператора $y=A^{-1}z$ (считаем его однозначно определенным), и здесь дополнительно возникает лишь проблема, чтобы замыкаемым был именно обратный оператор A^{-1}, т. е. чтобы $(\overline{A^{-1}})$ тоже был однозначным оператором. В случае многозначности последнего отображения предлагаемая методика позволяет, не строя замыкания $\bar{A}$, аппроксимировать какие-то из точных решений уравнения $\bar{A}y=z$.

9°. Вполне аналогично может быть рассмотрена обобщенная задача [11, 6] вычисления значений оператора (1) на элементе y, являющемся решением уравнения I-го рода (6). Оба оператора A и B достаточно предполагать замыкаемыми.

10°. Остается указать свойства операторов, влекущие их замыкаемость. Такие свойства, к сожалению, исследованы мало, и мы напомним лишь, что симметричный оператор гильбертова пространства всегда замыкаем [12, 13] и что линейный оператор $A=B+C$, отображающий одно банахово пространство в другое, замыкаем одновременно с оператором B, если C — ограниченный линейный оператор [12]. Обратный же оператор A^{-1} замыкаем (см. п. 8°), если A — симметричный оператор гильбертова пространства с плотной областью значений [13].

Из этого видно, что изложенные результаты позволяют устойчивым образом решать в гильбертовом пространстве некорректные задачи с симметричными операторами.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
12 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Морозов,* Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 11, № 4, 1019 (1971). [2] *В. В. Васин,* Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 5, 22 (1972). [3] *В. Н. Страхов,* ДАН, т. 207, № 5, 1057 (1972). [4] *О. А. Лисковец,* Докл. АН БССР, т. 15, № 6, 481 (1971). [5] *В. К. Иванов,* Сибирск. матем. журн., т. 11, № 5, 1009 (1971). [6] *О. А. Лисковец,* Дифференциальные уравнения, т. 10, № 2, 290 (1974). [7] *А. Н. Тихонов,* ДАН, т. 151, № 3, 501 (1963). [8] *I. Singer,* Rev. roum. math. pures et appl., v. 9, № 2, 167 (1964). [9] *О. А. Лисковец,* Дифференциальные уравнения, т. 7, № 8, 1531 (1971). [10] *О. А. Лисковец,* Докл. АН БССР, т. 16, № 12, 1081 (1972). [11] *В. А. Морозов, Н. Н. Кирсанова,* Сборн. Вычислит. методы и программирование, в. 14, М., 1970. [12] *Т. Като,* Теория возмущений линейных операторов, М., 1972. [13] *К. Морен,* Методы гильбертова пространства, М., 1965.