

П. И. БАЛК

**К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ
ПО ГАРМОНИЧЕСКИМ МОМЕНТАМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МАСС**

(Представлено академиком М. А. Садовским 10 VII 1974)

В ряде практических случаев удовлетворительное решение обратной задачи гравиметрии достигается за счет представления аномальных объектов как однородных тел простой геометрической формы. Известные аналитические решения, использующие характерные точки гравитационного поля, ввиду сложной функциональной зависимости последнего от параметров возмущающего объекта, получены преимущественно для двумерных горизонтальных (вертикальных) тел. Некоторое увеличение числа точных решений обратной задачи оказывается возможным благодаря использованию гармонических моментов возмущающих масс, которые ранее успешно применяли в основном лишь для отыскания отдельных элементов залегания аномалий тел (¹⁻³). Так, в (⁴) приводится решение для ограниченного по падению и простиранию наклонного пласта, получаемое с использованием моментов третьего порядка.

Ниже предлагаются решения трехмерной обратной задачи для ряда тел известной плотности, расположенных в нижнем полупространстве, так что одна из вертикальных плоскостей S является плоскостью симметрии тела. При этом для решения привлекаются гармонические моменты не выше второго порядка, приемы практического вычисления которых достаточно хорошо разработаны. Решения для всех тел сведены в единые формулы, различающиеся в каждом отдельном случае только постоянными коэффициентами.

Плоскость S может быть найдена следующим образом. Вычислим центробежные моменты I_{xz} и I_{yz} в системе отсчета $OXYZ$ с началом в эпицентре $(\bar{X}, \bar{Y}, 0)$ тяжести тела, определенном известным способом по моментам нулевого и первого порядков. Обозначая через φ угол между S и осью X , запишем эти моменты в локальной системе $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре тяжести тела, осью ζ — вниз, осью ξ — в S . Находим

$$I_{xz} = 2\pi f \sigma \cos \varphi \int_V \xi \xi \, dV, \quad I_{yz} = 2\pi f \sigma \sin \varphi \int_V \xi \xi \, dV, \quad \varphi = \arctg(I_{yz}/I_{xz}). \quad (1)$$

Укажем еще одну формулу для угла φ . Для этого вычислим I_{xy} и $I_{x^2-y^2}$:

$$I_{xy} = 2\pi f \sigma \cos \varphi \sin \varphi \int_V (\xi^2 - \eta^2) \, dV, \\ I_{x^2-y^2} = 2\pi f \sigma (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_V (\xi^2 - \eta^2) \, dV, \\ \operatorname{tg} 2\varphi = 2I_{xy} / (I_{x^2-y^2}). \quad (2)$$

Формула (1) однозначно определяет плоскость S в случае равенства I_{xz} и I_{yz} нулю одновременно. В частности, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ возможно, когда сечение тела плоскостью S имеет вертикальную или горизонтальную ось симметрии. Для таких тел может быть использована формула (2).

Предположим теперь, что тело обладает в плоскости S осью симметрии L . Пусть также тело V симметрично относительно плоскости, прохо-

дядей через L перпендикулярно S . Тогда угол ψ , составленный осью L с вертикалью OZ можно определить двояко: либо вычисляя необходимые моменты в первоначальной системе $OXYZ$, либо, зная φ , в системе $Oxyz$, образованной поворотом оси X на угол φ до совмещения ее с плоскостью S . В первом случае достаточно, располагая значениями I_{xz} и I_{yz} , вычислить момент второго порядка от гармонического полинома

$$P(X, Y, Z) = (I_{xz}X + I_{yz}Y)^2 / (I_{xz}^2 + I_{yz}^2) - Z^2. \quad (3)$$

Действительно, вводя в рассмотрение координатную систему $O\xi\eta\zeta$, связанную с исходной формулами перехода

$$\begin{aligned} X &= \xi \cos \varphi \cos \psi - \zeta \cos \varphi \sin \psi - \eta \sin \varphi, \\ Y &= \xi \sin \varphi \cos \psi - \zeta \sin \varphi \sin \psi + \eta \cos \varphi, \\ Z &= \xi \sin \psi + \zeta \cos \psi + \bar{Z}, \end{aligned} \quad (4)$$

нетрудно усмотреть, что

$$I_{xz} = 2\pi f \sigma \cos \varphi \cos \psi \sin \psi \int_V (\xi^2 - \zeta^2) dV, \quad (5)$$

$$I_{yz} = 2\pi f \sigma \sin \varphi \cos \psi \sin \psi \int_V (\xi^2 - \zeta^2) dV.$$

Используя (5), гармонический момент I_p можно записать как

$$I_p = 2\pi f \sigma (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \int_V (\xi^2 - \zeta^2) dV - \bar{Z}^2 I_0. \quad (6)$$

С другой стороны, находим

$$(I_{xz}^2 + I_{yz}^2)^{1/2} = \cos \psi \sin \psi \int_V (\xi^2 - \zeta^2) dV. \quad (7)$$

Из (6) и (7) тотчас следует

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2(I_{xz}^2 + I_{yz}^2)^{1/2} / (I_p + \bar{Z}^2 I_0). \quad (8)$$

Полагая теперь в (5) $\varphi=0$, а, значит, в (3) и (8) $I_{yz}=0$, получим в системе $Oxyz$

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2I_{xz} / (I_{xz}^2 + \bar{Z}^2 I_0). \quad (9)$$

Формула (9) согласуется с известной формулой для определения общего угла наклона двумерных тел^(3, 9).

Пусть теперь V — трехосный эллипсоид, полуоси которого суть a , b и c . Предположим единственно, что одна из его осей, например $2b$, параллельна плоскости наблюдения $Z=0$. Тогда полное решение обратной задачи заключается в отыскании, помимо полуосей эллипсоида и положения его центра тяжести, также угла ψ наклона оси $2c$ к вертикали и угла φ между координатной осью X и проекцией оси $2c$ на XOY . Поскольку вертикальная плоскость, проходящая через ось $2c$, в нашем случае является плоскостью симметрии эллипсоида, то для определения этих углов можно, очевидно, воспользоваться соответственно формулами (8), (9) и (1), (2). Если $\psi=0$ (эллипсоид V вертикальный), для вычисления угла φ следует использовать формулу (2).

В силу многозначности функции arctg , формула (9) дает два взаимно перпендикулярных положения оси $2c$. Выбор единственного из них можно произвести, например, судя по распределению аномалии Δg вдоль проекции этой оси на плоскость $Z=0$.

Введем следующие зависящие от формы гравитирующего объекта, но не от численных значений его параметров, константы:

$$D = \{V | a=b=c=1\}, \quad K_1 = \frac{1}{D} \int_V \xi^2 dV, \quad K_2 = \frac{1}{D} \int_V \eta^2 dV, \quad K_3 = \frac{1}{D} \int_V \zeta^2 dV, \quad (10)$$

где интегрирование осуществляется в выбранной выше системе координат (4) при единичных значениях параметров a, b, c . Для эллипсоида

$$D = \frac{1}{3}\pi, \quad K_1 = K_2 = K_3 = \frac{1}{5}. \quad (11)$$

Используя обозначения (10), выпишем моменты $I_{y^2-z^2}, I_{y^2-x^2}, I_0$:

$$I_{y^2-z^2} = I_0 \{K_2 b^2 - K_1 a^2 \sin^2 \psi - K_3 c^2 \cos^2 \psi - \bar{Z}^2\}, \quad (12)$$

$$I_{y^2-x^2} = I_0 \{K_2 b^2 - K_1 a^2 \cos^2 \psi - K_3 c^2 \sin^2 \psi\}, \quad (13)$$

$$I_0 = 2\pi f D \sigma a b c. \quad (14)$$

Пусть ψ не кратно $\pi/4$. Тогда разность уравнений (12) и (13) дает

$$K_1 a^2 - K_3 c^2 = (\bar{Z}^2 I_0 + I_{y^2-z^2} - I_{y^2-x^2}) / (I_0 \cos 2\psi) = A. \quad (15)$$

Умножим обе части (12) на $\cos^2 \psi$, а (13) — на $\sin^2 \psi$ и вычислим разность полученных выражений:

$$K_2 b^2 - K_3 c^2 = [(\bar{Z}^2 I_0 + I_{y^2-z^2}) \cos^2 \psi - I_{y^2-x^2} \sin^2 \psi] / (I_0 \cos 2\psi) = B. \quad (16)$$

Пусть

$$C = [I_0 / (2\pi f D \sigma)]^2. \quad (17)$$

Разрешим (14) относительно параметра c и внесем его в (15) и (16). Имеем систему двух нелинейных уравнений для a и b

$$K_1 a^4 b^2 - A a^2 b^2 - K_3 C = 0, \quad K_2 a^2 b^4 - B a^2 b^2 - K_3 C = 0. \quad (18)$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$a^2 = (K_2 b^2 + A - B) / K_1. \quad (19)$$

Обозначим $\beta = b^2$ и подставим (19) во второе уравнение из (18). Имеем

$$\beta^3 + \frac{A-2B}{K_2} \beta^2 + \frac{B(B-A)}{K_2^2} \beta - \frac{CK_1 K_3}{K_2^2} = 0. \quad (20)$$

Согласно (19), нас удовлетворяют положительные корни (20), большие

$$\bar{\beta} = (B-A) / K_2. \quad (21)$$

Независимо от знаков коэффициентов при β^2 и β уравнение (20) обладает по правилу знаков Декарта либо одним, либо тремя положительными корнями. С другой стороны, находим, что при $\beta=0$ и $\beta=\bar{\beta}$ значения левой части (20) совпадают. Следовательно, в интервале $(0, \bar{\beta})$ или $(\bar{\beta}, 0)$ полином, стоящий в (20) слева, обладает локальным экстремумом и потому уравнение не может иметь три положительных корня, превышающих $\bar{\beta}$. Поскольку к тому же свободный член в (20) отрицательный, уравнение (20) имеет всегда единственный положительный корень, превосходящий $\bar{\beta}$, который можно определить по формуле Кардано.

В случае $\bar{\beta}=0$ третье слагаемое в (20) аннулируется и независимо от знака B уравнение также имеет ровно один положительный корень. Располагая значением b , по формуле (19) вычислим a ; из (14) определим c .

Если $\psi = \pi/4$, то для отыскания полуосей эллипсоида можно воспользоваться гармоническими моментами $I_{y^2-x^2}, I_{xz}, I_0$. Находим

$$I_{xz} = \frac{1}{2} I_0 (K_1 a^2 - K_3 c^2), \\ I_{y^2-x^2} = \frac{1}{2} I_0 (2K_2 b^2 - K_1 a^2 - K_3 c^2).$$

Используя первое уравнение, сумму его со вторым, а также (14), получим

$$K_1 a^2 - K_3 c^2 = 2I_{xz} / I_0 = A, \quad K_2 b^2 - K_3 c^2 = (I_{xz} + I_{y^2-x^2}) / I_0 = B, \\ c = I_0 / (2\pi f D \sigma a b). \quad (22)$$

Используя обозначение (17), получим из (22) систему уравнений типа (18).

Таким образом, параметры φ , ψ , a , b и c трехосного эллипсоида однозначно определяются по гармоническим моментам. Из полученных формул, как частный случай, вытекает решение для эллипсоида вращения, произвольно ориентированного в полупространстве $Z > 0$.

Рассмотрим теперь прямоугольный параллелепипед V с ребрами $2a$, $2b$ и $2c$. Потребуем лишь, чтобы одно из ребер, пусть $2b$, было параллельно плоскости $Z=0$. Тогда углы наклона φ параллелепипеда к вертикали и поворота φ относительно избранной системы отсчета XOY могут быть определены из формул (8), (9) и (1), (2), за исключением вертикального параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат. В последнем случае обе формулы (1) и (2) дают неопределенность вида $0/0$.

Можно убедиться, что гармонические моменты $I_{y^2-z^2}$, $I_{y^2-x^2}$, I_0 для определения полуудли a , b , c ребер здесь, как впрочем и для других рассматриваемых далее тел, выражаются формулами (12)–(14). Следует лишь придать D , K_1 , K_2 и K_3 новые значения. Для параллелепипеда

$$D=8, \quad K_1=K_2=K_3=1/3.$$

Пусть V — эллиптический цилиндр, высота которого $2c$, а оси эллипса — $2a$ и $2b$, причем последняя параллельна горизонтальной плоскости. Тогда формула (8) дает угол наклона оси цилиндра к OZ , а угол между ее проекцией на XOY и координатной осью X определим из (1) или (2). Константы (10), обуславливающие значения параметров a , b и c , здесь таковы:

$$D=2\pi, \quad K_1=K_2=1/4, \quad K_3=1/3.$$

Как частный случай, можно получить решение для кругового цилиндра, произвольно расположенного в нижнем полупространстве.

Пусть V — прямая призма с ромбическим основанием, одна из диагоналей которого параллельна XOY . Искомые параметры — полуудлины a , b диагоналей ромба и полувысота c призмы. Тогда два угла, характеризующие положение призмы в пространстве, вновь найдутся из (1), (2), (8), (9), а константы D и K_i имеют значения

$$D=4, \quad K_1=K_2=1/6, \quad K_3=1/3.$$

Множество геометрических фигур, обратная задача для которых поддается аналитическому решению с помощью описанных формул, не ограничивается приведенными решениями для наиболее часто употребляемых в практике гравirazведки тел. Так, например, могут быть определены в явном виде параметры некоторых тел, огранченных конической поверхностью: эллиптического конуса, пирамиды с ромбическим и прямоугольным основанием, ровно как с основанием формы равнобедренного треугольника.

Так как система уравнений (14), (19), (20) обладает единственным положительным решением независимо от численных значений входящих в них гармонических моментов, то предлагаемый набор аналитических решений можно использовать для отыскания начального приближения интерпретируемого геологического объекта при решении обратной задачи гравirazведки методом подбора.

Формулы (1), (2), (8), (9) могут также иметь и самостоятельный характер, их можно использовать для ориентировочного отыскания положения аномалиеобразующего объекта.

Институт геохимии
Сибирского отделения Академии наук СССР
Иркутск

Поступило
19 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. А. Гамбурцев, Журн. прикл. физ., т. 7, в. 5 (1930). ² Г. А. Гамбурцев, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4 (1938). ³ А. П. Казанский, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 2–3 (1938). ⁴ А. В. Кудря, ДАН, т. 205, № 3 (1972). ⁵ К. Ф. Тяпкин, ДАН, т. 129, № 5 (1959).