

Е. П. БАРАНОВСКИЙ, С. С. РЫШКОВ

**КОМБИНАТОРНО-МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА  $L$ -РАЗБИЕНИЙ  
ОБЩИХ ПЯТИМЕРНЫХ РЕШЕТОК**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 4 VII 1974)

1°. В исследовании  $L$ -разбиений общих  $n$ -мерных решеток или, что то же самое, примитивных  $n$ -мерных параллелоэдров, естественно стоят три задачи: 1) перечислить попарно различные типы  $L$ -разбиений; 2) для каждого из таких типов указать область в пространстве коэффициентов положительных квадратичных форм; 3) описать комбинаторно-метрическую структуру  $L$ -разбиений каждого типа. Для  $n \leq 3$  задачи 1) и 2) были решены Е. С. Федоровым (1). Наиболее глубокое общее исследование относительно всех трех задач и решение их для  $n \leq 4$  содержится в работе Г. Ф. Вороного (2).

В работах (3, 4) построены новые  $n$ -мерные алгоритмы и на их основе решены для  $n=5$  первые две задачи. Для 12 известных до работ (3, 4) при  $n=5$  типов задача 3) была решена в работах (2, 5-7). Предлагаемая заметка содержит полное решение при  $n=5$  задачи 3), т. е. ее решение для всех 224 типов.

Ниже мы будем пользоваться результатами работ (2-4); как результаты этих работ, так и используемые в них обозначения (особенно работ (3, 4)) будем предполагать читателю известными.

2°. Мы здесь несколько детализируем некоторые результаты и обозначения работ (3, 4).

Совершенную область  $R_1$ , как и в (4), будем рассматривать как множество квадратичных форм вида

$$f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{i,j=1(i<j)}^5 [\rho_{ij}(x_i+x_j)^2 + \rho_{ij}(x_i-x_j)^2]; \quad \rho_{ij}\rho_{ij} \geq 0.$$

При таком обозначении группа  $G_1$  области  $R_1$  может быть описана как группа всевозможных перенумераций и изменений знаков переменных  $x_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ . Это описание переносится на параметры  $\rho_{ij}$ ,  $\rho_{\bar{i}\bar{j}}$  в виде перенумераций индексов и замены индекса  $ij$  на индекс  $\bar{i}\bar{j}$  и обратно (соответственно при фиксированных  $i$  и всех  $j=1, \dots, 5$ ;  $j \neq i$ ).

В работе (4) для обозначения областей предтипов использовались знаки 0, 1, 2, 3,  $a$ ,  $b$ , причем индекс, по которому изучался данный предтип, указывался местом знака предтипа в «номере», т. е. в строке, обозначающей область  $C$ -типа области  $R_1$  (т. е. пересечение области  $C$ -типа с областью  $R_1$ ). Здесь мы иногда будем индекс предтипа обозначать явно, в виде нижнего индекса у знака предтипа. Например, III типу Вороного, описанному (4) строкой 0000baaaaa, отвечают соответственно предтипы  $0_{12}$ ,  $0_{13}$ ,  $0_{14}$ ,  $0_{15}$ ,  $b_{23}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{25}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{35}$ ,  $a_{45}$ .

Теперь, например, переходом от знаков предтипов к задающим эти предтипы неравенствам (4) обнаруживаем, что относительно группы  $G_1$  области предтипов 0, 1, 2, 3 эквивалентны между собой, так же как эквивалентны между собой области предтипов  $a$  и  $b$ . Напоминаем (4), что область предтипа  $0_{ij}$  задается неравенствами  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp} \leq \rho_{ij}$ ,  $\rho_{\bar{i}\bar{j}}$ ,  $\rho_{\bar{k}\bar{m}} + \rho_{\bar{k}\bar{p}} + \rho_{\bar{m}\bar{p}}$ ,  $\rho_{\bar{k}\bar{m}} + \rho_{\bar{k}\bar{p}} + \rho_{\bar{m}\bar{p}}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ , а область предтипа  $a_{ij}$  — неравен-

ствами  $\rho_{ij} \leq \bar{\rho}_{ij}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ ,  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp}$ . (Мы пишем  $c \leq d_1, \dots, d_r$  вместо  $c \leq d_1, \dots, c \leq d_r$ .) Здесь и всюду ниже считаем набор  $i, j, k, m, p$  перестановкой чисел 1, 2, 3, 4, 5.

Сформулируем в наших обозначениях более подробно последнее предложение заметки (3):

**Предложение 1.** *L-разбиение каждой решетки любого C-типа области  $R_1$  содержит в качестве ребер следующие 15 «постоянных» векторов смежности:  $d^0 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ ,  $d^1 = (-1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ , ...,  $d^5 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2)$ ,  $d^{12} = (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ ,  $d^{13} = (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$ , ...,  $d^{14} = (1/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2)$ ,  $l^1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $l^2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ , ...,  $l^5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ .*

В зависимости от принадлежности C-типа к различным предтипам, в L-разбиении имеются еще и «переменные» векторы смежности, обозначения и координаты  $x_1, \dots, x_5$  которых даются в табл. 1 ( $k < m < p$ ).

Таблица 1

		$x_i$	$x_j$	$x_k$	$x_m$	$x_p$
$0_{ij}$	$l^{0, ij}$	0	0	1	1	1
$1_{ij}$	$l^{1, ij}$	0	0	-1	1	1
$2_{ij}$	$l^{2, ij}$	0	0	1	-1	1
$3_{ij}$	$l^{3, ij}$	0	0	1	1	-1
$a_{ij}$	$l^{ij}$	1	1	0	0	0
$b_{ij}$	$l^{\bar{ij}}$	1	-1	0	0	0

Значения и координаты  $x_1, \dots, x_5$  которых даются в табл. 1 ( $k < m < p$ ).

З<sup>0</sup>. Точки пространства  $E^5$  решетки  $\Gamma$  будем обозначать их радиусами-векторами. Тогда задание симплекса  $S \subset E^5$  его вершинами будет иметь вид  $S = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_5)$ .

Введем следующие обозначения симплексов решеток  $\Gamma$ :  $S_{ij, km}^1 = (\bar{0}, l^i, l^j, d^k, d^m)$ ,  $S_{ij}^2 = (\bar{0}, l^k, l^m, l^p, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij}^3 = (\bar{0}, l^k, l^m, l^p, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij}^4 = (\bar{0}, l^i, l^j, d^k, d^m, d^p)$ ,  $S_{ij, km}^5 = (\bar{0}, l^k, l^m, l^p, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij, k}^6 = (\bar{0}, l^m, l^p, l^0, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij, k}^7 = (\bar{0}, l^m, l^p, l^0, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij, k}^8 = (\bar{0}, -l^k, l^m, l^p, d^i, d^j)$ ,  $S_{ij, k}^9 = (\bar{0}, -l^k, l^m, l^p, d^i, -d^j)$ ;  $S_{ij, k}^8 \sim S_{ij}^2$ ,  $S_{ij, k}^9 \sim S_{ij}^3$ . Симплекс, в который перейдет какой-либо из симплексов  $S_{ij, km}$  при изменении знака у одной или нескольких переменных  $x_i, x_j, x_k, x_m$ , мы будем обозначать тем же знаком, добавляя только черточки над индексами переменных, у которых изменен знак.

Совокупность шести симплексов  $\{S_{ij, km}^1, S_{ij, kp}^1, S_{ij, mp}^1, S_{ji, km}^1, S_{ji, kp}^1, S_{ji, mp}^1\} = (ij, N)$  или эквивалентную ей назовем симплицальным комплексом переделывания  $V_{22}^5(ij)$  в нормальном состоянии; совокупность шести симплексов  $\{S_{ij}^2, S_{ji}^2, S_{ij}^3, S_{ji}^3, S_{ij}^4, S_{ji}^4\} = (ij, \bar{N})$  или эквивалентную ей назовем симплицальным комплексом переделывания  $V_{22}^5(ij)$  в отклоненном состоянии. Геометрическое описание комплекса переделывания  $V_{22}^5$  см. (4).

**Предложение 2.** Пусть область C-типа имеет среди задающих ее неравенств систему неравенств, определяемых предтипами  $a_{ij}, b_{km}, b_{kp}, b_{mp}$ , или эквивалентную ей относительно группы  $G_1$  систему.

Тогда, в зависимости от того, имеет ли место неравенство  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp} > \rho_{ij}$  или неравенство  $\rho_{km} + \rho_{kp} + \rho_{mp} < \rho_{ij}$  (соответственно эквивалентные неравенства), среди попарно негомологических L-симплексов решетки этого C-типа содержатся 6 симплексов  $(ij, N)$  или  $(ij, \bar{N})$  (соответственно эквивалентные шестерки симплексов).

Каждый L-тип области  $R_1$  назовем ключевым L-типом содержащего его C-типа, если среди симплексов L-разбиения решеток этого L-типа нет ни одного симплицального комплекса  $V_{22}^5$  в отклоненном состоянии. Остальные L-типы области  $R_1$  назовем отклоненными.

**Предложение 3.** Каждая область C-типа области  $R_1$  содержит одну и только одну область ключевого L-типа.

Список областей C-типов области  $R_1$  и, тем самым, список ключевых L-типов дан в табл. 2. Всего таких областей и ключевых L-типов 84, причем первые 75 строк табл. 2 вместе с I типом Вороного задают полный список попарно неэквивалентных C-типов при  $n=5$ .

1. aaaaaaaaa;	2. baaaaaaaa;	3. aaaaaabab;	4. baabbaabab;	5. bbbbbbbbb;
6. abbbbbbbbb;	7. bbbbbbbaba;	8. Oaaaaaaaa;	9. Oababaaaa;	10. Oaababaaa;
11. Oaabbaaaaa;	12. Oaaaaaaba;	13. Oaabaaaaba;	14. Oababaabab;	15. Oaabbaaaba;
16. Oabaaaaaba;	17. Oaabababa;	18. Oabaabaaba;	19. a0aa0aaaa;	20. aa0aa0aaab;
21. ba0aa0aaaa;	22. ba0aa0aaab;	23. aa0ba0aaa;	24. aa0ba0aaab;	25. aa0ba3aaaa;
26. aa0ba3aaab;	27. ba0ba0aaaa;	28. ba0ba0aaab;	29. aa0aa0aaba;	30. aa0aa0aabb;
31. aa0aa3aaba;	32. aa0aa3aabb;	33. aa0ba0baaa;	34. aa0ba0baab;	35. aa2aa3aaba;
36. aa2aa3aabb;	37. ba0aa0aaba;	38. ba0aa0aabb;	39. ba0aa3aaba;	40. ba0aa3aabb;
41. ba0ba0baaa;	42. ba0ba0baab;	43. aa0bb0aaaa;	44. aa0bb0aaab;	45. aa0aa0a0aa;
46. ba0aa0a0aa;	47. ba0aa0a1aa;	48. aa0aa0a0ba;	49. aa3aa0a0ba;	50. aa2aa0a0ba;
51. aa3aa3a0ba;	52. aa2aa2a0ba;	53. aa3aa2a0ba;	54. bb0ab0a0aa;	55. bb2ab0a0aa;
56. ab0ba3a0ba;	57. ba0aa0a0ba;	58. ba0aa3a0ba;	59. aa2ab0b0ba;	60. Oa0aa0aaaa;
61. Oa0aa0a0ba;	62. 1a0aa0baab;	63. Oa0bb0aaaa;	64. aa0bb3aaaa;	65. Oa0ab0aaaa;
66. Oa2bb3aaaa;	67. Oa0aa0aaba;	68. 1a0aa0aaba;	69. Oa3aa3aaba;	70. Oa2aa3aaba;
71. Oa0ab0baaa;	72. 1a3aa2aba;	73. aa0aa0a0a0;	74. ba0aa0a0a0;	75. ba0aa0a0b0;
76. aa0ab0a0a3;	77. aa2ab0a0a3;	78. aa1ab0a0a3;	79. ba0ba0b3a0;	80. ba0ba3b1a0;
81. ba0ba3b3a0.				

Лемма 1. Пусть решетка  $\Gamma$  принадлежит такой области ключевого  $L$ -типа, которая имеет среди задающих ее неравенств систему неравенств, определяемых предтипами  $a_{ij}$ ,  $a_{km}$ , или эквивалентную ей относительно группы  $G_1$  систему.

Тогда в  $L$ -разбиении решетки  $\Gamma$  содержатся 4 симплекса  $S_{ij,km}^1$ ,  $S_{ji,km}^1$ ,  $S_{ij,mk}^1$ ,  $S_{ji,mk}^1$  или соответственно эквивалентные им.

Лемма 2. Пусть область  $C$ -типа имеет среди задающих ее неравенств систему неравенств, определяемых предтипами  $O_{ij}$ ,  $a_{km}$ ,  $a_{kp}$ ,  $a_{mp}$ , или ей эквивалентную.

Тогда среди попарно негомологических  $L$ -симплексов решетки  $\Gamma$  этого  $C$ -типа содержится «блок» (т. е. совокупность) из 12 симплексов

$$S_{ij,km}^5, S_{ji,km}^5, S_{ij,mk}^5, S_{ji,mk}^5, S_{ij,kp}^5, S_{ji,kp}^5, S_{ij,pk}^5, S_{ji,pk}^5, S_{ij,mp}^5, S_{ji,mp}^5, S_{ij,pm}^5, S_{ji,pm}^5$$

или соответственно эквивалентный блок.

Лемма 3. Пусть область  $C$ -типа имеет среди задающих ее неравенств систему неравенств, определяемых предтипами  $O_{ij}$ ,  $a_{km}$ ,  $a_{kp}$ ,  $b_{mp}$ , или ей эквивалентную.

Тогда среди попарно негомологических  $L$ -симплексов решетки  $\Gamma$  этого  $C$ -типа содержится блок из 12 симплексов  $S_{ij,mk}^5$ ,  $S_{ij,pk}^5$ ,  $S_{ji,mk}^5$ ,  $S_{ji,pk}^5$ ,  $S_{ij,k}^8$ ,

$$S_{ji,k}^8, S_{ij,k}^7, S_{ji,k}^7, S_{ij,k}^8, S_{ji,k}^8, S_{ij,k}^9, S_{ji,k}^9$$

или соответственно эквивалентный блок.

Эти три леммы «о блоках» доказаны путем разыскания слоевых плоскостей решеток (их имеется в зависимости от  $C$ -типа от 10 до 14 в каждой решетке) и исследования  $L$ -симплексов, опирающихся своими основаниями на эти плоскости.

Теорема 1. Все 60 попарно негомологических  $L$ -симплексов решеток каждого ключевого  $L$ -типа области  $R_1$  исчерпываются симплексами, о которых говорится в леммах 1—3 и которые вполне определяются строкой, задающей область того  $C$ -типа области  $R_1$ , который содержит данный ключевой  $L$ -тип.

Теорема 2. Попарно негомологические  $L$ -симплексы решеток отклоненного  $L$ -типа  $C$ -типа  $\Delta$  области  $R_1$  получаются из совокупности попарно негомологических  $L$ -симплексов ключевого  $L$ -типа  $C$ -типа  $\Delta$  путем замены, на основе предложения 2, одного или нескольких определенных симплицальных комплексов  $V_{22}^5$  в нормальном состоянии на соответствующие им комплексы в отклоненном состоянии.

Список попарно неэквивалентных отклоненных  $L$ -типов дан в табл. 3. В этом списке  $L$ -типы заданы следующим образом: после порядкового номера ключевого  $L$ -типа в табл. 2 (чем назван  $C$ -тип, включающий в себя

2. 34; 2. 34, 35; 2. 34, 35, 45; 3. 13; 3. 13, 15; 4. 13; 4. 13, 14; 5. 12; 5. 12, 13; 5. 12, 13, 14; 5. 12, 13, 23; 5. 12, 13, 14, 15\*; 6. 12; 6. 12, 13; 6. 13; 6. 13, 14; 6. 13, 23; 6. 12, 13, 23; 6. 12, 13, 14; 6. 13, 14, 15; 6. 12, 13, 14, 15\*; 7. 12; 7. 14; 7. 12, 14; 7. 14, 24; 7. 14, 34; 7. 12, 14, 24; 7. 14, 24, 34; 7. 14, 24, 34, 45\*; 9. 23; 9. 23, 24; 10. 13; 10. 13, 14; 10. 13, 23; 11. 14; 11. 15; 11. 14, 15; 11. 14, 24; 12. 14; 12. 14, 24; 13. 14; 13. 23; 14. 14; 14. 14, 24; 15. 15; 16. 14; 16. 23; 16. 24; 16. 14, 24; 16. 23, 24; 16. 23, 25; 16. 23, 24, 25\*; 17. 13; 17. 14; 17. 15; 17. 13, 23; 17. 13, 14; 17. 13, 15; 17. 14, 15; 17. 13, 14, 15\*; 18. 13; 18. 14; 18. 13, 14; 18. 13, 23; 18. 14, 24; 18. 13, 14, 15\*; 20. 12; 21. 34; 21. 34, 45; 22. 12; 22. 34; 22. 34, 45; 23. 34; 24. 12; 24. 34; 25. 34; 26. 12; 26. 34; 27. 45; 28. 12; 28. 45; 29. 12; 31. 12; 34. 12; 35. 12; 37. 12; 37. 34; 37. 34, 45\*; 38. 34; 38. 34, 45\*; 39. 12; 39. 34; 39. 45; 39. 34, 45\*; 40. 34; 40. 45; 40. 34, 45\*; 41. 34; 41. 45; 41. 34, 45\*; 42. 12; 42. 34; 42. 45; 42. 34, 45\*; 43. 34; 43. 34, 45\*; 44. 12; 44. 34; 44. 34, 45\*; 46. 45; 47. 45; 54. 45\*; 55. 45\*; 56. 45\*; 57. 45\*; 58. 45\*; 59. 45\*.

данный отклоненный  $L$ -тип) стоят индексы  $ij$  комплексов переделывания  $V_{23}^5(ij)$ , находящиеся в данном  $L$ -типе в отклоненном состоянии.

4<sup>0</sup>. Из результатов (4) выводится, что к каждому  $L$ -типу области  $R_2$  можно перейти от определяемого им  $L$ -типа области  $R_1$  на основе комплекса переделывания  $V_{23}^5$ . Такие  $L$ -типы области  $R_1$  даются следующим предложением (в табл. 2 это №№ 75, 79—81, а в табл. 3 они помечены звездочками).

Предложение 4. Каждый из  $L$ -типов области  $R_1$ ,  $L$ -разбиение решеток которого содержит 4 симплекса  $S_{ij}^2, S_{ik}^2, S_{im}^2, S_{ip}^2$  или эквивалентные им 4 симплекса, и только такой тип смежен по комплексу переделывания  $V_{23}^5$  с  $L$ -типом области  $R_2$ . При переходе к  $L$ -типу области  $R_2$  названные 4 симплекса и только они перестают быть  $L$ -симплексами, а в  $L$ -разбиении появляются три новых  $L$ -симплекса  $(0, l^j, l^k, l^m, l^p, d^0)$ ,  $(0, l^j, l^k, l^m, l^p, d^i)$ ,  $(0, l^j, d^k, d^m, d^p)$ , причем последний имеет объем в 2 раза больше объема основного симплекса решетки.

Теорема 3. Структура  $L$ -разбиения всякого  $L$ -типа области  $R_2$  определяется по структуре  $L$ -разбиения смежного с ним  $L$ -типа области  $R_1$  на основе замены, указанной в предложении 4.

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
6 VI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. С. Федоров, Начала учения о фигурах, Петербург, 1885. Изд. АН СССР, 1953.  
<sup>2</sup> Г. Ф. Вороной, Собр. соч., т. 2, Киев, 1952, стр. 239. <sup>3</sup> С. С. Рышков, ДАН, т. 212, № 1, 46 (1973). <sup>4</sup> Е. П. Барановский, С. С. Рышков, ДАН, т. 213, № 3, 532 (1973).  
<sup>5</sup> С. С. Рышков, ДАН, т. 162, № 2, 277 (1965). <sup>6</sup> D. W. Trener, The Covering of Space by Spheres. Doctor Thesis, Adelaide, Australia, 1972. <sup>7</sup> E. S. Barnes, D. W. Trener, J. Austral. Math. Soc., v. 14, № 2, 247 (1972).