Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 2

УДК 513. 831 МАТЕМАТИКА

В. А. ВИНОКУРОВ

РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 VI 1974)

Целью данной заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Функция f с областью определения в метрическом пространстве X и с областью значений в метрическом пространстве Y регуляризуема тогда и только тогда, когда для некоторого гомеоморфизма ψ метрического пространства Y в линейное нормированное пространство Y_1 функция ψf является аналитически представимой функцией первого класса.*

В случае сепарабельного Y это утверждение было получено в работе [1], откуда мы заимствуем обозначения и определения.

Далее рассматривается функция f с областью определения $D(f)$ в метрическом пространстве X и с областью значений $T(f)$ в топологическом пространстве Y. Обозначим через $U[x, \delta]$ замкнутый шар радиуса δ с центром в точке x пространства X и напомним два определения, сформулированные в [1] для случая метрического Y.

Определение 1. Функция f T-регуляризуема, если существует однопараметрическое семейство отображений R_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, \delta_0)$, такое, что $R_\delta(U[x, \delta])\to f(x)$ $\forall x\in D(f)$ при $\delta\to 0$.

Определение 2. Функция f A-регуляризуема, если существует функция R: $2^X\to 2^Y$, сопоставляющая каждому непустому подмножеству пространства X непустое подмножество пространства Y так, что для всякого $x\in D(f)$ и любой последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $A_n\ni x$, $n=1, 2, \ldots$, сходящейся к точке x, последовательность множеств $\{R(A_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $f(x)$.

Естественным образом переносятся на случай топологического Y и определения U-, A'-, U'-регуляризуемости, причем остаются справедливыми теорема 2 работы [1] об эквивалентности A-, A'-, U-, U'-, T-регуляризуемости и утверждение об эквивалентности регуляризуемости функции f, рассматриваемой из X в Y (задача I), и функции f, рассматриваемой из $D(f)$ в Y (задача IV), с дословным повторением доказательств. Из определения 2 следует также, что регуляризуемость функции f сохраняется при гомеоморфном преобразовании пространств X и Y. Регуляризуемость функции не зависит и от вложения области значений в метрические пространства.

Теорема 2. *Если ψ: $X\to X_1$ и φ: $Y\to Y_1$ — гомеоморфные вложения метрических пространств X и Y в метрические пространства X_1 и Y_1, то регуляризуемость функций f и $\varphi f\psi^{-1}$ эквивалентна.*

Замечание 1. Если Y — неметризуемое топологическое пространство, то теорема 2 уже, вообще говоря, неверна.

Дадим достаточное условие регуляризуемости в метрических пространствах.

Теорема 3. *Если отображение f: $X\to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y является аналитически представимой функцией первого класса, то оно регуляризуемо.*

Доказательство см. в ([2], стр. 38) или в работе [1], где основной частью доказательства теоремы 10 является доказательство сформулированного факта.

Как известно (см. [1]), аналитическая представимость не является необходимым условием регуляризуемости в общем случае метрического пространства Y, однако справедлива

Теорема 4. *Если функция f с областью определения в метрическом пространстве X и с областью значений в выпуклом подмножестве Y некоторого локально-выпуклого линейного топологического пространства регуляризуема, то существует T-регуляризатор R_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, \delta_0)$, что каждое отображение R_δ в достаточно малой окрестности любой точки $x_0\in X$ имеет вид*

$$R_\delta(x)=\sum_{i=1}^{n(x_0)}\alpha_i(x)y_i,\quad 0\leqslant\alpha_i(x)\leqslant 1,\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=1, \tag{1}$$

где функции $\alpha_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица, $y_1, y_2\dots y_n\in Y$.

Доказательство проводится по схеме теоремы 11 работы [1] с заменой конечной индукции трансфинитной и с использованием паракомпактности метрического пространства.

Так как функция f регуляризуема, то существует T-регуляризатор U_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, \delta_0)$. По отображению U_δ мы построим новое отображение $R_{\delta/2}$, так что семейство R_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, {}^1/_2\delta_0)$, образует искомый регуляризатор.

Построение 1. По теореме Цермело (см. [3], стр. 34) вполне упорядочим множество $U_\delta(X)$ значений отображения U_δ. Через $O(A)$ будем обозначать обобщенный открытый шар радиуса $\delta/2$ вокруг множества A: $O(A)\equiv\{x\in X\colon \rho(x, A)<\delta/2\}$, причем $O(\Lambda)\equiv\Lambda$ для пустого множества Λ.

Для каждого $y\in U_\delta(X)$ определим множество A_y следующим образом: $A_y=U_\delta^{-1}(y)$, если y — первый элемент в $U_\delta(X)$ и $A_y=U_\delta^{-1}(y)\diagdown\bigcup_{y'<y}O(A_{y'})$. Заметим, что $\rho(A_{y'}, A_{y''})\geqslant\delta/2$ при любых $y', y''\in U_\delta(X)$, $y'<y''$, и $X=\bigcup_{y\in U_\delta(X)}U_\delta^{-1}(y)=\bigcup_{y\in U_\delta(X)}O(A_y)$.

Введем обозначение $Q\equiv\{y\in U_\delta(X)\colon A_y\neq\Lambda\}$.

В открытое покрытие пространства X множествами $O(A_y)$, $y\in Q$, впишем локально-конечное открытое покрытие S и сопоставим каждому $U\in S$ некоторое $l(U)=y\in Q$ такое, что $O(A_y)\supset U$.

Построение 2. Для каждого $U\in S$ $\rho(x, X\diagdown U)$ — непрерывная неотрицательная функция на X, удовлетворяющая условию Липшица. В силу локальной конечности покрытия S функция

$$\alpha_U(x)=\rho(x,X,\diagdown U)\Big/\sum_{U\in S}\rho(x,X,\diagdown U)$$

принимает значения из $[0, 1]$, локально липшицева и $\sum_{U\in S}\alpha_U(x)=1$ $\forall x\in X$. Следовательно, отображение

$$R_{\delta/2}(x)=\sum_{U\in S}\alpha_U(x)l(U)$$

удовлетворяет условиям (1).

Проверим, что семейство отображений R_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, {}^1/_2\delta_0)$, образует T-регуляризатор для функции f. В самом деле, поскольку U_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, \delta_0)$,— T-регуляризатор, то для любой точки $x\in D(f)$ и любой выпуклой окрестности K точки $f(x)$ в пространстве Y найдется $\delta_1>0$, что при $\delta\in(0, \delta_1)$ $U_\delta(U[x, \delta])\subset K$. Следовательно, если $y\in Q$, но $y\notin K$, то $U_\delta^{-1}(y)\cap U[x, \delta]=\Lambda$, откуда и $U[x, \delta/2]\cap O(A_y)=\Lambda$, но это означает, что у всех $U\in S$ таких, что $l(U)=y$, $\alpha_U(x')=0$ при $x'\in U[x, \delta/2]$. Мы убедились, что в сумме $\sum\limits_{U\in S}\alpha_U(x')l(U)$ при $x'\in U[x, \delta/2]$ отличны от нуля только те $\alpha_U(x')$, для которых $l(U)\in K$, т. е. и выпуклая комбинация $R_{\delta/2}(x')=\sum\limits_{U\in S}\alpha_U(x')l(U)$ принадлежит K при $\delta\in(0, \delta_1/2)$. Теоерма 4 доказана.

Следствие 1. *Функция f из метрического пространства X в линейное нормированное пространство Y регуляризуема тогда и только тогда, когда она является аналитически представимой функцией первого класса из $D(f)$ в Y.*

Замечание 2. Теорема 1 следует из теорем 2, 3, 4 и останется в силу теоремы 2 верной, если в ее формулировке заменить слова «для некоторого гомеоморфизма» на «для любого гомеоморфизма».

Следствие 2. *Если функция f: $X\to Y$, где Y — выпуклое подмножество (сепарабельного) линейного нормированного пространства, аналитически представима, то для любого гомеоморфного вложения ψ: $X\to X_1$ в метрическое пространство X_1 существует последовательность локально липшицевых (липшицевых) и локально-конечномерных (конечномерных) отображений f_n: $X_1\to Y$, что*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \forall x\in\psi(X).$$

В случае произвольного топологического Y, вообще говоря, не существует T-регуляризатора из непрерывных функций, но, используя построение 1 теоремы 4 и модифицируя теорему 5 из (1) и теорему 2 из ([4]), можно доказать T-регуляризуемость B-измеримыми функциями первого класса.

Теорема 5. *Если функция f из метрического пространства X в топологическое пространство Y регуляризуема, то существует T-регуляризатор R_δ: $X\to Y$, $\delta\in(0, \delta_0)$, такой, что для всякого R_δ прообраз $R_\delta^{-1}(A)$ любого множества $A\subset Y$ есть двустороннее множество первого класса.*

При положительном решении проблемы аналитической представимости (см. ([5]), стр. 285) теорема 1 имела бы следующий вид:

Теорема 1′. *Функция f из метрического пространства X в метрическое пространство Y регуляризуема тогда и только тогда, когда она является B-измеримой функцией первого класса.*

Однако в настоящее время справедливость теоремы 1 установлена лишь для сепарабельного Y (см. ([1])) или для случая, когда X — абсолютно аналитическое множество. Во втором случае для доказательства теоремы 1 нужно сослаться на работу Ханселла (см. ([6]), стр. 168), где анонсируется следующий результат: если X — абсолютно аналитическое множество, Y — абсолютный ретракт, то всякая B-измеримая функция f: $X\to Y$ первого класса является аналитически представимой функцией первого класса; в справедливости этого результата нетрудно убедиться, исходя из леммы 10 той же статьи. Далее нужно заметить, что всякое метрическое пространство X можно изометрично вложить в линейное нормированное пространство (см. ([3]), стр. 233), а по теореме Дугунджи (см. ([7]), стр. 86) линейное нормированное пространство есть абсолютный ретракт. Применяя теперь теорему 2 и следствие 1, убеждаемся в справедливости теоремы 1 для случая абсолютно аналитического X.

Применение теоремы 4 к линейным обратным задачам с учетом примечания статьи ([8]) приводит к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть A — линейное уплотнение (т. е. непрерывное инъективное отображение) рефлексивного банахова пространства X в ли-*

нейное нормированное пространство Y; тогда существует последовательность непрерывных функций f_n: $Y \to X$, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = A^{-1}(y) \qquad \forall y \in A(X).$$

Данная теорема естественно приводит к следующей задаче, решение которой автору неизвестно.

Пусть f — линейное отображение f: $X \to Y$ линейного нормированного пространства X в банахово пространство Y — является аналитически представимой функцией первого класса. Существует ли последовательность линейных ограниченных отображений f_n: $X \to Y$, $n=1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X?$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Винокуров*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 11, № 5 (1971). [2] *В. А. Винокуров*, Кандидатская диссертация, МГУ, 1971. [3] *К. Куратовский*, Топология, т. 1, М., 1966. [4] *В. А. Винокуров*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 11, № 6 (1971). [5] *S. Banach*, Fund. Math., v. 17, 283 (1931). [6] *R. W. Hancell*, Trans. Am. Math. Soc., v. 161 (1971). [7] *К. Барсук*, Теория ретрактов, М., 1971. [8] *В. А. Винокуров*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 12, № 3 (1972).